

# Problème 4 : Dépollution de la Seine

Montr'Euler

14 avril 2024

## Résumé

Le problème présenté s'intéresse à la croissance d'une population de bactéries dans un bassin d'eau polluée. Ces bactéries ayant une faculté de dépollution, il sera question de déterminer, selon les conditions initiales, la possibilité d'un assainissement total du bassin. On a traité toutes les questions sauf la question 7.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Enoncé et notations</b>	<b>2</b>
1.1	Le volume d'eau propre dans un bassin stagnant . . . . .	3
1.2	Le volume des bactéries . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Une population bornée</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Des bactéries polluphiles</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Des bactéries polluphobes</b>	<b>9</b>
4.1	Si $K \leq 1$ . . . . .	10
4.2	Si $1 \leq K \leq 2$ . . . . .	10
4.3	Si $K = 4$ . . . . .	10
4.4	Si $K > 4$ . . . . .	11
4.5	Si $2 < K < 4$ . . . . .	11

<b>5</b>	<b>Brassage du bassin</b>	<b>11</b>
5.1	Les premiers jours . . . . .	12
5.2	La dépollution selon $K$ . . . . .	13
5.3	Calculs numériques . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Evaporation de l'eau</b>	<b>15</b>
6.1	Les points fixes . . . . .	16
6.2	Les premiers jours . . . . .	18
6.3	Etude de la convergence . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Une météo variable</b>	<b>19</b>
7.1	Les premiers jours . . . . .	20
7.2	La dépollution selon $K_1$ et $K_2$ . . . . .	20
<b>8</b>	<b>D'autres pistes de recherche</b>	<b>21</b>

## 1 Enoncé et notations

Les bactéries sont placées, au jour 0, dans un bassin de volume  $V = 2500m^3$ , qui ne contient que de l'eau polluée.

Soit  $T \in \mathbb{N}$ , on note  $v_T$  le volume des bactéries au matin du jour  $T$ , avec  $v_0 \in [0; V]$ . On note  $u_T$  le volume total d'eau propre au matin du jour  $T$ . On a  $u_0 = 0$ .

Cycle de vie des bactéries au jour  $T$  :

- A midi, les bactéries dépolluent un volume  $v_T$  d'eau du bassin.
- Au coucher du soleil, les bactéries se reproduisent. Les bactéries mères disparaissent. Le volume des bactéries filles est alors de  $f(v_T)$ , avec  $f : [0; V] \rightarrow [0; V]$ .
- Jusqu'à minuit, les bactéries se déplacent dans le bassin.
- A minuit, les bactéries présentes dans de l'eau propre meurent, celles se trouvant dans de l'eau polluée survivent et dépollueront celle-ci à midi, le lendemain.

## 1.1 Le volume d'eau propre dans un bassin stagnant

Au jour  $T + 1$ , le volume d'eau propre correspond à la somme du volume d'eau propre au jour  $T$  et du volume  $v_T$  dépollué par les bactéries à midi. Ainsi,

$$\forall T \in \mathbb{N}, u_{T+1} = u_T + v_T$$

On en déduit, par récurrence, que

$$\forall T \in \mathbb{N}, u_{T+1} = \sum_{k=0}^T v_k$$

## 1.2 Le volume des bactéries

Soit  $g$  un fonction quantifiant le volume de bactéries disparaissant à mu-nuit. On suppose que  $\forall T, g(f(v_T), u_{T+1}) \in [0; f(v_T)]$  (le volume de bactéries filles disparaissant ne pas être supérieur au volume de bactéries filles ; cette notation suppose donc aussi que  $f(v_T) \geq 0$ ). On a,

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} f(v_T) - g(f(v_T), u_{T+1}) & \text{si } f(v_T) - g(f(v_T), u_{T+1}) \leq V - u_{T+1} \\ V - u_{T+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On majore  $v_{T+1}$  par  $V - u_{T+1}$  car, si  $v_{T+1}$  était supérieur à  $V - u_{T+1}$ , cela signifierait qu'il y a plus de bactéries au matin du jour  $T + 1$  que d'eau pollué. Or toutes celles présentes dans de l'eau propre sont mortes pendant la nuit.

**Proposition 1.2.1.** *Si,  $f([0; V]) \subset [0; V]$ , alors  $\forall T \in \mathbb{N}, 0 \leq v_T \leq V - u_T$ .*

*Démonstration.* L'inégalité  $v_T \leq V - u_T$  est vraie pour tout  $T \geq 1$  d'après la définition de  $v_{T+1}$ . Par ailleurs,  $v_0 \leq V$ . Or  $V = V - 0 = V - u_0$ , donc,  $v_0 \leq V - u_0$ . Donc, l'inégalité est vraie pour tout  $T \in \mathbb{N}$ .

Démontrons par récurrence l'inégalité  $v_T \geq 0$ . Soit  $T \in \mathbb{N}$ , on considère la propriété  $p_t$  : " $v_T \geq 0$ ".

**Initialisation**  $v_0 \in [0; V]$ , donc,  $v_0 \geq 0$ , donc P est initialisée.

**Hérédité** On suppose que pour un  $T \in \mathbb{N}$  donné, pour tout  $T' \leq T, P(T')$  est vraie, soit que  $v_{T'} \geq 0$ . Montrons que  $P(T + 1)$  est vraie, c'est-à-dire  $v_{T+1} \geq 0$ . Par disjonction des cas,

Si  $v_{T+1} = V - u_{T+1}$ . D'après la première inégalité,  $v_T \leq V - u_T$ , donc,  $v_T + u_T \leq V$ . Or,  $u_{T+1} = v_T + u_T$ , on en déduit que  $u_{T+1} \leq V$ . Finalement,  $v_{T+1} = V - u_{T+1} \geq V - V = 0$ .

Si  $v_{T+1} = f(v_T) - g(f(v_T), u_{T+1})$ , D'après l'hypothèse de récurrence,  $v_T \geq 0$  et  $u_T = \sum_{k=0}^T v_k \geq 0$ . D'après la première inégalité,  $v_T \leq V - u_T$ , puisque  $u_T \geq 0$ , il vient,  $v_T \leq V$ . On en déduit que  $v_T \in [0; V]$ . Or,  $f([0; V]) \subset [0; V]$ , donc,  $f(v_T) \geq 0$ . On a donc,  $g(f(v_T), u_{T+1}) \in [0; f(v_T)]$ ,

$$0 \leq g(f(v_T), u_{T+1}) \leq f(v_T)$$

donc,

$$-f(v_T) \leq -g(f(v_T), u_{T+1}) \leq 0$$

on en déduit que,

$$f(v_T) - f(v_T) \leq f(v_T) - g(f(v_T), u_{T+1}) \leq f(v_T)$$

on obtient,

$$0 \leq v_{T+1}$$

La propriété P est héréditaire.

**Conclusion** La propriété est initialisée pour  $n = 0$  et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence,  $\forall T \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq v_T$ .  $\square$

**Proposition 1.2.2.** *Si,  $f([0; V]) \subset [0; V]$ , alors  $\forall T \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_T \leq V$ .*

*Démonstration.*  $u_T$  est une somme de termes positifs, donc  $u_T \geq 0$ . Par ailleurs, si  $T \geq 1$ , alors, d'après la proposition précédente,  $v_{T-1} \leq V - u_{T-1}$ , donc,  $v_{T-1} + u_{T-1} = u_T \leq V$ . Si  $T = 0$ ,  $u_0 = 0 \leq V$ .  $\square$

**Proposition 1.2.3.** *Si,  $f([0; V]) \subset [0; V]$ , et  $v_0 > 0$  alors  $\forall T \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < u_T \leq V$ .*

*Démonstration.* Résultat immédiat d'après la proposition précédente.  $\square$

**Proposition 1.2.4.** *Soit  $T \leq 2$ ,  $u_T = V$  si et seulement si,  $f(v_{T-2}) - g(f(v_{T-2}), u_{T-1}) \geq V - u_{T-1}$ .*

*Démonstration.*  $u_T = V \iff u_{T-1} + v_{T-1} = V \iff v_{T-1} = V - u_{T-1} \iff f(v_{T-2}) - g(f(v_{T-2}), u_{T-1}) \geq V - u_{T-1}$   $\square$

**Remarque** Si  $T \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_T = V \iff v_{T-1} = V - u_{T-1}$ .

## 2 Une population bornée

On considère à présent que,

$$f(v) = K \left( v - \frac{v^2}{V} \right)$$

On cherche à déterminer les valeurs de  $K$  pour lesquelles, si  $0 \leq v_0 \leq V$ , alors, pour tout  $T$ ,  $0 \leq v_T \leq V$ .

**Lemme 2.0.1.** *Soit  $K \in \mathbb{R}$  donné, les propositions suivantes sont équivalentes,*

(i)  $0 \leq v_0 \leq V \implies \forall T \in \mathbb{N}, 0 \leq v_T \leq V$

(ii)  $f([0; V]) \subset [0; V]$

*Démonstration.* (i)  $\implies$  (ii)

$f$  est défini comme une application de  $[0; V]$  dans  $[0; V]$ , donc  $f([0; V]) \subset [0; V]$ .  $K$  doit toujours permettre (ii), donc, si (i) est vrai, l'implication est vraie.

(ii)  $\implies$  (i) Si  $f([0; V]) \subset [0; V]$ , d'après la démonstration de la proposition 1.2.1, l'initialisation tient à  $0 \leq v_0 \leq V$ , donc, si  $0 \leq v_0 \leq V$ , alors, pour tout  $T \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq v_T \leq V - u_T$ . D'après la proposition 1.2.2,  $u_T \geq 0$ , donc,  $\forall T \in \mathbb{N} 0 \leq v_T \leq V$ .  $\square$

On cherche donc à déterminer les valeurs de  $K$  pour lesquelles  $f([0; V]) \subset [0; V]$ .  $f$  est dérivable sur  $[0; V]$  comme somme de fonctions dérivables sur ce même intervalle.

$$\forall v \in [0; V], f'(v) = K - \frac{2Kv}{V} = K \left( 1 - \frac{2v}{V} \right)$$

Procédons par disjonction des cas, pour  $K \geq 0$ , on obtient,

$v$	0	$\frac{V}{2}$	V
Signe de $f'(v)$	+	0	-
Variations de $f$	0	$f\left(\frac{V}{2}\right)$	0

$f$  admet un maximum en  $v = \frac{V}{2}$ , donc, pour que  $f([0; V]) \subset [0; V]$ , il faut que  $f\left(\frac{V}{2}\right) \leq V$ , soit,

$$K \left( \frac{V}{2} - \frac{\left(\frac{V}{2}\right)^2}{V} \right) \leq V$$

Ce qui équivaut à,

$$K \frac{V}{4} \leq V$$

Soit,

$$K \leq 4$$

pour  $K < 0$ ,  $f'(v)$  est de signe opposé, ainsi,  $\forall v \in [0; V]$ ,  $f(v) \leq 0$ .

Or,  $K$  doit permettre,  $f([0; V]) \subset [0; V]$  donc  $K = 0$ . Ainsi, le cas  $K < 0$  ne permet pas d'obtenir  $f([0; V]) \subset [0; V]$ .

Donc,  $K \in [0; 4] \iff f([0; V]) \subset [0; V]$ . D'après le lemme 2.0.1, les valeurs de  $K$  pour lesquelles si  $0 \leq v_0 \leq V$ , alors pour tout  $T$ ,  $0 \leq v_T \leq V$ , sont tous les  $K$  compris entre 0 et 4.

### 3 Des bactéries polluphiles

Pour simplifier, on considère que  $K \geq 0$ , que  $v_0 \in [0; V]$  et que

$$f(v) = \begin{cases} Kv & \text{si } 0 \leq Kv \leq V \\ V & \text{sinon} \end{cases}$$

On a,  $\forall v \in [0; V]$ ,  $0 \leq f(v) \leq V$  On en déduit que l'on pourra appliquer les propositions 1.2.1 et 1.2.2 aux modèles qui suivent.

Dans ce modèle, on suppose que les bactéries filles se déplacent en priorité dans l'eau polluée. A défaut de place, certaines resteront dans de l'eau propre. Puisque  $V - u_{T+1}$  correspond au volume d'eau polluée le soir du jour  $T$ , on a,  $(g(f(v_T), u_{T+1}) = 0)$

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} f(v_T) & \text{si } f(v_T) \leq V - u_{T+1} \\ V - u_{T+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc, si  $v_0 > 0$

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} K v_T & \text{si } K v_T \leq V - u_{T+1} \\ V - u_{T+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On cherche à savoir, selon les valeurs de  $K$  et de  $v_0$ , si le bassin finira par être dépollué.

Si  $v_0 = 0$ , il semble évident que le bassin restera pollué. Si  $K = 0$ , le bassin ne sera dépollué que dans le cas où  $v_0 = V$ .

On considère donc, à partir de maintenant, que  $v_0 > 0$  et  $K > 0$ . On remarque par ailleurs, que dire que le bassin sera dépollué revient à dire qu'il existe  $T \in \mathbb{N}$  tel que  $u_T = V$ .

**Lemme 3.0.1.** *Soit  $T' \in \mathbb{N}^*$ , si  $\forall T < T', v_T > 0$ , alors*

$$\forall T < T' - 1, v_T = K^T v_0$$

*Démonstration.* On procède par récurrence, soit  $T \in \mathbb{N}$ , on considère la propriété " $v_T = K^T v_0$ "

**Initialisation**  $v_0 = K^0 v_0$ , la proposition est initialisée pour  $n = 0$ .

**Hérédité** Soit  $T < T' - 2$  donné, on suppose que  $v_T = K^T v_0$ , montrons que  $v_{T+1} = K^{T+1} v_0$ . On a,  $T+2 < T'$ , donc  $v_{T+2} > 0$ . Si  $v_{T+1} = V - u_{T+1}$ ,  $u_{T+2} = v_{T+1} + u_{T+1} = V$ , donc, d'après la proposition 1.2.1,  $v_{T+2} \leq V - u_{T+2} = 0$ , donc,  $v_{T+2} = 0$ . Ainsi,  $v_{T+1} = K v_T$ . D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient  $v_{T+1} = K^{T+1} v_0$ , la propriété est héréditaire.

**Conclusion** La propriété est initialisée pour  $n = 0$  et elle est héréditaire, d'après le principe de récurrence,  $\forall T < T' - 1, v_T = K^T v_0$   $\square$

D'après la proposition 1.2.4, le bassin est dépollué au jour  $T$  quand,

$$K v_{T-2} \geq V - u_{T-1}$$

D'après le lemme 3.0.1, (on peut supposer que  $\forall t < T, v_t > 0$ , sinon, il existe  $v_T = 0$ , le bassin est déjà dépollué), il vient,

$$K^{T-1} v_0 \geq V - \sum_{k=0}^{T-2} v_k$$

Donc,

$$K^{T-1} v_0 \geq V - \sum_{k=0}^{T-2} K^k v_0$$

Il vient,

$$K^{T-1} \geq \frac{V}{v_0} - \sum_{k=0}^{T-2} K^k$$

On obtient,

$$\sum_{k=0}^{T-1} K^k \geq \frac{V}{v_0}$$

Par disjonction des cas,

Si  $K \neq 1$ ,

$$\frac{K^T - 1}{K - 1} \geq \frac{V}{v_0} \quad (1)$$

Donc,

$$K^T \geq \frac{V(K-1)}{v_0} + 1$$

Si  $K > 1$ , puisque  $\ln(K) > \ln(1) = 0$  et  $\frac{V(K-1)}{v_0} + 1 > 0$

$$T \geq \frac{\ln\left(\frac{V(K-1)}{v_0} + 1\right)}{\ln(K)}$$

On pose  $m = \frac{\ln\left(\frac{V(K-1)}{v_0} + 1\right)}{\ln(K)}$ . On en déduit que si,  $K > 1$  et  $v_0 > 0$ , le bassin est dépollué au jour  $\lceil m \rceil$ .

Si  $K < 1$ , d'après 1, le bassin est dépollué en  $T$  si et seulement si  $\exists T \in \mathbb{N}, K^T \leq \frac{V(K-1)}{v_0} + 1$ . Ainsi, si  $\frac{V(K-1)}{v_0} + 1 \leq 0$ , soit, si  $\frac{v_0}{K-1} > V$ , il n'existe pas de  $T$  vérifiant 1, le bassin n'est jamais dépollué.

Si  $\frac{v_0}{K-1} \leq V$ , alors, 1 équivaut à,

$$T \geq \frac{\ln\left(\frac{V(K-1)}{v_0} + 1\right)}{\ln(K)} \quad (\text{car } \ln(K) < \ln(1) = 0)$$

Par un raisonnement similaire au cas précédent, le bassin est dépollué au jour  $\lceil m \rceil$ .

Si  $K = 1$ ,  $\sum_{k=0}^{T'-1} K^k \geq \frac{V}{v_0} \iff T' \geq \frac{V}{v_0}$ , donc, le bassin est dépollué au jour  $\lceil \frac{V}{v_0} \rceil$ .

## 4 Des bactéries polluphobes

On suppose maintenant que les bactéries se déplacent préférentiellement dans l'eau propre. A défaut de place, certaines resteront dans de l'eau pollué. On suppose, par ailleurs, que  $v_0 > 0$ . On a donc,  $(g(f(v_T), u_{T+1}) = \begin{cases} u_{T+1} & \text{si } u_{T+1} \leq f(v_T) \\ f(v_T) & \text{sinon} \end{cases})$

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} f(v_T) - u_{T+1} & \text{si } u_{T+1} \leq f(v_T) \leq V \\ V - u_{T+1} & \text{si } f(v_T) > V \\ 0 & \text{si } f(v_T) < u_{T+1} \end{cases}$$

On considère, par ailleurs, que  $v_0 > 0$ .

On a donc,

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} Kv_T - u_{T+1} & \text{si } u_{T+1} \leq Kv_T \leq V \\ V - u_{T+1} & \text{si } Kv_T > V \\ 0 & \text{si } Kv_T < u_{T+1} \end{cases}$$

**Lemme 4.0.1.** *On calcule les premiers termes des suites  $(v_T)$  et  $(u_T)$ ,*

$T$	$u_T$	$v_T$
0	0	$v_0$
1	$v_0 + u_0 = v_0$	$Kv_0 - u_1 = (K - 1)v_0$
2	$v_0 + (K - 1)v_0 = Kv_0$	$Kv_1 - u_2 = K(K - 2)v_0$
3	$K(K - 1)v_0$	$K(K^2 - 3K + 1)v_0$
4	$K^2(K - 2)v_0$	$K^2(K^2 - 4K + 3)v_0$

On cherche tout d'abord à savoir si  $(v_T)$  converge.

On raisonne par l'absurde, si  $(v_T)$  ne converge pas vers 0, par définition de la limite,

$$\exists \epsilon > 0, \forall N > 0, \exists T \geq N, v_T > \epsilon$$

Ainsi pour un  $\epsilon$  donné, en particulier pour  $N = 0$ , il existe  $T_0 > 0$  tel que  $v_{T_0} > \epsilon$ .

On prend maintenant  $N = T_0 + 1$ , il existe de même  $T_1 \geq T_0 + 1 > T_0$ , tel que  $v_{T_1} > \epsilon$ .

En itérant ce processus, on construit une suite  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $v_{T_k} > \epsilon$ . Or, la suite  $(u_T)$  est minoré par celle de la somme des  $v_{T_k}$ . On en déduit que lorsque  $T$  tend vers l'infini,  $u_T$  tend aussi vers l'infini. Ce qui est contradictoire avec la proposition 1.2.2,  $u_T \leq V$ .

On étudie la suite  $(v_T)$  selon les valeurs de  $K$ .

#### 4.1 Si $K \leq 1$

Si  $K \leq 1$ , la seule valeur de  $v_0$  permettant la dépollution du bassin est  $v_0 = V$ . D'après le tableau du lemme 4.0.1, pour  $K \leq 1$  toutes les bactéries sont mortes au jour 1 :  $v_1 = (K - 1)v_0 \geq 0$ . Le bassin ne peut donc avoir été dépollué que pour  $v_0 = V$ .

#### 4.2 Si $1 \leq K \leq 2$

Si  $1 \leq K \leq 2$ , le bassin est dépollué si et seulement si  $v_0 \geq \frac{V}{K}$ . D'après le tableau du lemme 4.0.1, pour  $1 \leq K \leq 2$  toutes les bactéries sont mortes au jour 2 :  $v_2 = K(K - 2)v_0 \geq 0$ . Il faut donc que le bassin soit dépollué au jour 2. D'après la proposition 1.2.4,  $u_2 = V$  si et seulement si,  $Kv_0 - u_1 \geq V - u_1$ , c'est-à-dire,  $Kv_0 \geq V$ ,  $v_0 \geq \frac{V}{K}$ .

#### 4.3 Si $K = 4$

Si  $K = 4$ , on a, jusqu'à un certain  $T'$ ,  $v_T \geq u_T$  :

Par récurrence,  $v_0 > 0 = u_0$ . Si  $v_T \geq u_T$ ,  $v_T + v_T \geq v_T + u_T$ , donc,  $2v_T \geq u_{T+1}$ . Or,  $v_{T+1} = 4v_T - u_{T+1}$  tant que  $4v_T \leq V$ . Donc,  $v_{T+1} \geq 4v_T - 2v_T = 2v_T$ . Il vient,  $v_{T+1} \geq u_{T+1}$ . Ainsi, tant que  $4v_T \leq V$ ,  $v_T$  croît, donc,  $4v_T$  finit par atteindre  $V$ , soit,  $v_{T+1} = V - u_{T+1}$ ,  $u_{T+2} = V$ . Le bassin sera dépollué.

Par ailleurs,  $v_{T+1} = 4v_T - u_{T+1} \leq 4v_T$ , donc, par récurrence,  $4^T v_0 \geq v_T$ . De plus,  $v_{T+1} \geq 2v_T$ , donc,  $v_T \geq 2^T v_0$ . Ainsi,  $2^T v_0 \leq v_T \leq 4^T v_0$ . Ainsi, si  $2v_{T-1}$  atteint  $V$  le bassin est totalement dépollué en  $T$ .

Donc, si  $2^T v_0 \geq V$ , soit si  $T \geq \frac{\ln(\frac{V}{v_0})}{\ln(2)}$ , alors  $2v_{T-1} \geq V$ , donc  $v_T \leq 2v_{T-1} \leq$

$V$ , donc  $u_{T+1} = 0$ . Le bassin sera dépollué au plus tard, en  $T = \lceil \frac{\ln(\frac{V}{v_0})}{\ln(2)} + 1 \rceil$ .

A l'inverse, tant que  $4 \times 4^{T-1}v_0 \leq V$ ,  $4v_{T-1}$  n'atteindra pas  $V$ .

Donc, tant que  $T \leq \lceil \frac{\ln(\frac{V}{v_0})}{\ln(4)} \rceil$  le bassin ne sera pas dépollué.

Il faut donc que  $T \geq \lceil \frac{\ln(\frac{V}{v_0})}{\ln(4)} + 1 \rceil$  pour que le bassin soit dépollué. Finalement, on en déduit que la dépollution complète du bassin aura lieu en :

$$T \in \left[ \lceil \frac{\ln(\frac{V}{v_0})}{\ln(4)} + 1 \rceil ; \lceil \frac{\ln(\frac{V}{v_0})}{\ln(2)} + 1 \rceil \right]$$

#### 4.4 Si $K > 4$

On procède de la même manière qu'au cas précédent, il vient,  $(K-2)^T v_0 \leq v_T \leq K^T v_0$ . Ainsi, la dépollution complète a lieu en :

$$T \in \left[ \lceil \frac{\ln(\frac{V}{v_0})}{K} + 1 \rceil ; \lceil \frac{\ln(\frac{V}{v_0})}{\ln(2)} + 1 \rceil \right]$$

#### 4.5 Si $2 < K < 4$

On a, d'après le tableau 4.0.1,  $v_4 = K^2(K^2 - 4K + 3)v_0$ , or  $K^2 - 4K + 3$  a pour racines 3 et 1, ainsi, pour  $K \leq 3$ ,  $v_4 = 0$ . Toutes les bactéries sont mortes au jour 4. Il faut donc que le bassin soit dépollué au jour 4. D'après la proposition 1.2.4,  $u_4 = V$  si et seulement si,  $Kv_2 - u_3 \geq V - u_3$ , c'est-à-dire,  $K(K^2 - 3K + 1)v_0 \geq V - Kv_0$ ,  $K(K^2 - 3K + 2)v_0 \geq V - Kv_0$ . Si  $K > 3$ , il semble que l'on puisse affirmer que  $(K-2)^T v_0 \leq v_T$ , ainsi, le bassin finira par être dépollué.

## 5 Brassage du bassin

L'eau du bassin est maintenant brassé entre le coucher du soleil et minuit. A minuit, les bactéries se trouvent proportionnellement répartis dans le volume

$a_T V$  d'eau propre et  $b_T V$  d'eau polluée. On considère, afin de simplifier les calculs, que  $v_T$  et  $u_T$  représentent respectivement les proportions de bactéries et d'eau propre. Ainsi,  $\forall T \in \mathbb{N}, u_T = a_T$ , la loi d'évolution des bactéries est donc,

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} K v_T (1 - u_{T+1}) & \text{si } K v_T (1 - u_{T+1}) \leq V - u_{T+1} \\ V - u_{T+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Car seules les bactéries présentes dans l'eau polluée ( $1 - u_{T+1}$ ) en fin de journée survivent. La suite  $(u_T)$  est croissante. Comme elle est majorée par 1, elle est convergente. La question est de savoir si elle converge vers 1.

## 5.1 Les premiers jours

Au jour 1, on a,  $u_1 = v_0$  et  $v_1 = K v_0 (1 - v_0)$ .

Il y a dépollution totale dès le jour 1, si  $v_0 = 1$ .

Il y a dépollution totale au jour 2 si les bactéries emplissent tout le bassin avant le brassage à la fin du Jour 1, soit si  $K v_0 \geq 1$ , soit  $K \geq \frac{1}{v_0}$

Au jour 3,  $u_3 = v_0(1 + K(1 - v_0))$   $v_3 = K^2 v_0(1 - v_0)(1 - v_0(1 + K(1 - v_0)))$  Il y a dépollution totale au jour 3 si les bactéries emplissent tout le bassin à la fin du jour 3, avant le brassage, soit :  $K^2 v_0(1 - v_0) \geq 1$ , soit  $K \geq \frac{1}{\sqrt{v_0(1 - v_0)}}$ .

La condition sur K pour la dépollution au jour 4 est plus difficile à étudier car elle suppose que  $K v_3 \geq 1$ , ce qui nous donne un polynôme de degré 4 en K et en  $v_0$ , qui doit être supérieur à 1.

Au jour 5, la dépollution complète a lieu si  $K v_4 \geq 1$ , soit une inéquation avec un polynôme d'ordre 8 en K et 8 en  $v_0$ .

Il y a dépollution au jour  $(T + 1)$  si les bactéries emplissent l'ensemble du bassin à la fin du jour T.

**Lemme 5.1.1.** *Au jour  $T \in \mathbb{N}^*$  l'inégalité  $K v_{T-1} \geq 1$  est polynomiale d'ordre  $2^{T-1}$  tant pour K que pour  $v_0$ .*

*Démonstration.* Soit  $T \in \mathbb{N}^*$ , on pose,  $p_t$  : " $v_T$  est un polynôme d'ordre  $2^T$  pour  $v_0$  et  $2^T - 1$  pour K, et  $u_T$  est un polynôme d'ordre  $2^{T-1}$  pour  $v_0$  et d'ordre  $2^{T-1} - 1$  pour K". Démontrons que cette propriété est vraie pour tout  $T \in \mathbb{N}^*$  par récurrence,

**Initialisation** En  $T = 1$ ,  $v_1 = K^2 v_0(1 - v_0)$ , c'est un polynôme de degré  $2 = 2^{2-1}$  pour  $K$  et  $v_0$ . De plus,  $u_1 = u_0 + v_0 = v_0$ , qui est d'ordre  $1 = 2^0$  pour  $v_0$  et  $0 = 2^0 - 1$  pour  $K$ . La propriété est initialisée.

**Hérédité** On suppose que pour un  $T \in \mathbb{N}^*$ , la propriété  $p_t$  est vraie. Montrons que  $P(T + 1)$  est vraie.  $u_{T+1} = u_T + v_T$ , d'après l'hypothèse de récurrence,  $u_{T+1}$  est un polynôme du même ordre que  $v_T$  pour  $v_0$  et pour  $K$ , donc d'ordre  $2^T$  pour  $v_0$  et  $2^T - 1$  pour  $K$ .  $v_{T+1} = K v_T(1 - u_{T+1})$ , donc,

- en  $v_0$ , l'ordre est  $2^T$  pour  $u_{T+1}$  et  $2^T$  pour  $v_T$ , donc l'ordre est de  $2^{T+1}$
- en  $K$ , l'ordre est  $2^T - 1$  pour  $u_{T+1}$  et  $2^T - 1$  pour  $v_T$ , donc l'ordre est de  $(1 + 2^T - 1)(2^T - 1) = 2^{T+1} - 1$ .

La propriété est héréditaire.

**Conclusion** La propriété est initialisée pour  $n = 1$  et elle est héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour  $T \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_T$  est un polynôme d'ordre  $2^T$  pour  $v_0$  et  $2^T - 1$  pour  $K$ , et  $u_T$  est un polynôme d'ordre  $2^{T-1}$  pour  $v_0$  et d'ordre  $2^{T-1} - 1$  pour  $K$ . On en déduit que, pour tout  $T \in \mathbb{N}$ ,  $K v_{T-1}$  est un polynôme d'ordre d'ordre  $2^{T-1}$  tant pour  $K$  que pour  $v_0$ .  $\square$

Dans le repère d'axes,  $K$ ,  $v_0$ ,  $K v_T$ , les aires correspondants à l'inégalité  $K v_T \geq 1$  sont la trace dans le plan  $z = 1$  du volume défini par  $z \geq K v_T(x = K, y = v_0)$ . Il n'y a aucune raison apparente pour que l'on n'ait pas plusieurs aires disjointes.

## 5.2 La dépollution selon $K$

Etudions les possibilités de dépollution selon  $K$ .

Si  $K \leq 1$ , dans l'hypothèse où  $v_0 < 1$  (si  $v_0 = 1$ , la dépollution a lieu dès le jour 1 indépendamment de  $K$ ). On a  $u_0 = 0 < 1$  et  $v_0 < 1$ .

**Lemme 5.2.1.** *Si  $K \leq 1$ , alors pour tout  $T \in \mathbb{N}$ ,  $u_T < 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $T \in \mathbb{N}$ , on pose  $p_t$  : " $u_T < 1$  et  $v_T < 1 - u_T$ ". Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $T$ .

**Initialisation** en  $T = 0$ ,  $u_0 = 0 < 1$  et, on suppose que  $v_0 < 1$ . La propriété est initialisée.

**Hérédité** On suppose que pour un rang  $T \in \mathbb{N}$  donné,  $p_t$  est vrai. Montrons que  $P(T + 1)$  est vrai. D'après l'hypothèse de récurrence,  $u_T < 1$  et  $v_T < 1 - u_T$ . Donc,  $u_{T+1} = u_T + v_T < 1$ . Et  $v_{T+1} = K v_T(1 - u_{T+1})$ , or  $K \leq 1$  et

$v_T < 1$ , donc  $Kv_T < 1$ . On en déduit que  $v_{T+1} < 1 - u_{T+1}$ . La propriété est héréditaire. **Conclusion** La propriété est initialisée pour  $n = 0$  et elle est héréditaire, d'après le principe de récurrence,  $\forall T \in \mathbb{N}$ ,  $u_T < 1$ .  $\square$

Ainsi, si  $K \leq 1$ , le bassin n'est pas dépollué après un nombre fini de jours.  $K > 1$  est donc une condition nécessaire de dépollution, indépendamment de  $v_0$ . C'est assez intuitif, car si  $k \leq 1$ , le nombre de bactéries va décroître d'une génération à l'autre (ou rester stable). Même avant le brassage, le volume des bactéries ne sera jamais suffisant pour remplir complètement le bassin et pour le dépolluer complètement.

A contrario, on a montré plus haut que  $K$  peut prendre des valeurs aussi proches de 1 qu'on souhaite, dès lors que  $Kv_0 \geq 1$ , il y a dépollution au 2ème jour.

### 5.3 Calculs numériques

Les graphiques ci-dessous représentent les résultats de dépollution au bout de 40 itérations.

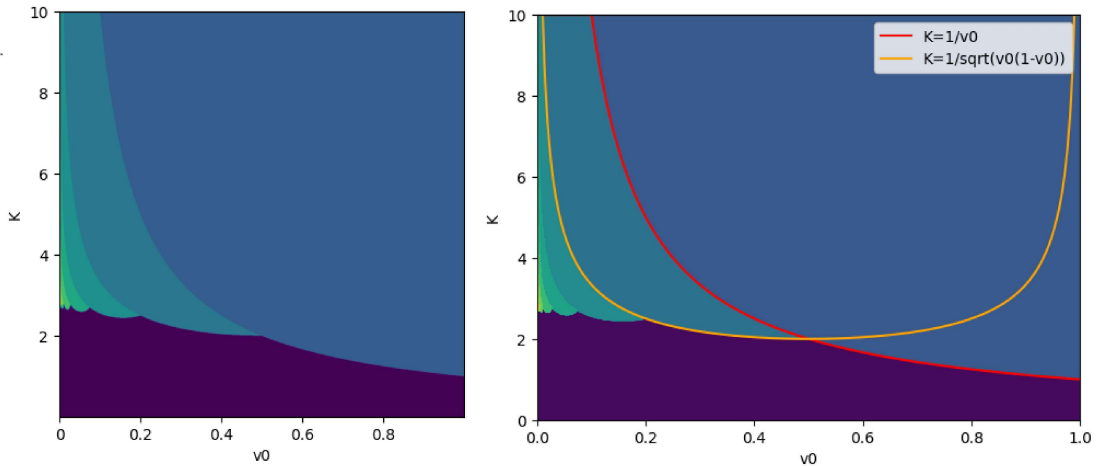
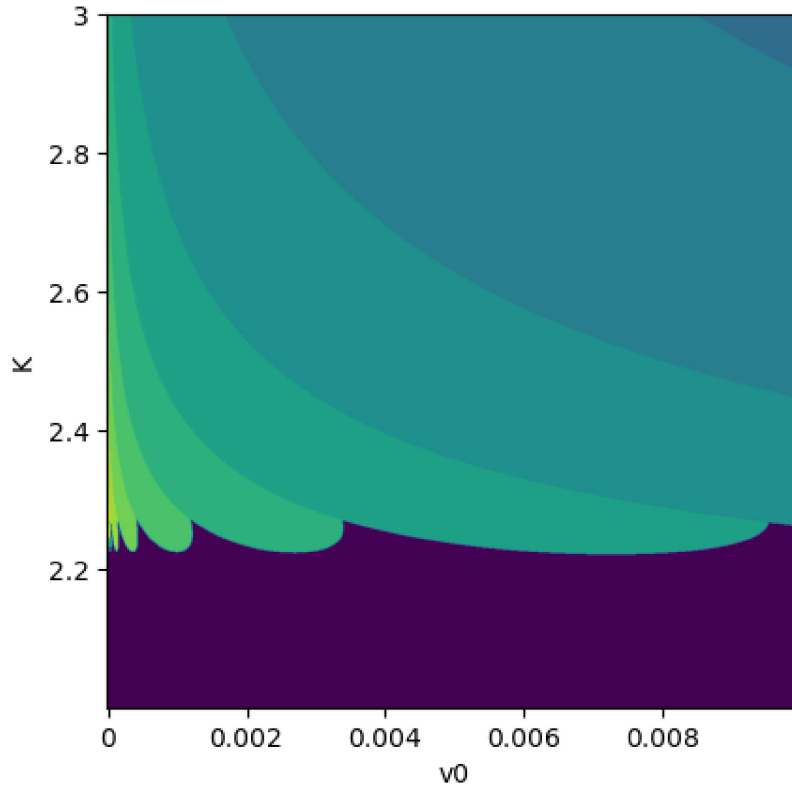


FIGURE 1 – Les couleurs représentent le nombre d'étapes au bout duquel  $u_T = 1$ . La couleur violette correspond à une absence de dépollution.

On observe sur ces graphiques que le bassin n'est effectivement jamais dépollué pour  $K \leq 1$ . On peut, par ailleurs, aussi conjecturer que pour  $K \geq e$ , le bassin est toujours dépollué, peu importe la valeur de  $v_0$ .

En zoomant sur de petites valeurs de  $v_0$ , on obtient,



## 6 Evaporation de l'eau

Chaque jour entre midi et le coucher du soleil un volume  $w \in [0; V]$  d'eau s'évapore. Elle est remplacé pour la même quantité d'eau pollué au coucher du soleil avant le brassage. On considère dans la suite de l'exercice que  $w$  représente la proportion d'eau qui s'évapore. Avec une proportion d'évaporation  $w$ , la proportion d'eau propre du jour suivant est comme dans le modèle précédent la somme de la proportion d'eau dépolluée et de la dépollution des bactéries présentes au matin, mais multipliée par un coefficient  $(1 - w)$  de l'eau qui s'est évaporée :

$$\forall T \in \mathbb{N}, u_{T+1} = (u_T + v_T)(1 - w)$$

Les bactéries sont également affectées d'une diminution  $(1-w)$  avant leur reproduction au coucher du soleil. Leur modèle devient donc,

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} K(1-w)v_T(1-u_{T+1}) & \text{si } K(1-w)v_T(1-u_{T+1}) \leq 1-u_{T+1} \\ 1-u_{T+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

## 6.1 Les points fixes

On considère tout d'abord, que les limites des formules ne sont jamais atteintes,  $K(1-w)v_T(1-p_{T+1})$  toujours inférieur à  $1-p_{T+1}$ .

On commence par rechercher les points fixes du modèle, s'ils existent. Un point fixe de la double suite  $(u_T, v_T)$ , est un couple  $(u_f, v_f)$  tel que,

$$\begin{cases} u_f = (u_f + v_f)(1-w) \\ v_f = K(1-w)v_f(1-u_f) \end{cases}$$

Le couple  $(0, 0)$  est un point fixe.

**Lemme 6.1.1.** *Si  $w \neq 1$  ou 0, soit les deux éléments du point fixe sont nuls, soit aucun n'est nul.*

*Démonstration.* Si,  $u_f = 0$ ,  $0 = v_f(1-w)$ , donc  $v_f = 0$ . Réciproquement, si  $v_f = 0$ ,  $u_f = u_f(1-w)$ , donc,  $u_f w = 0$ ,  $u_f = 0$ .  $\square$

**Lemme 6.1.2.** *Il existe un seul point fixe non nul, si  $K(1-w) \leq 1$ ,*

$$\begin{cases} u_f = 1 - \frac{1}{K(1-w)} & \text{si } K(1-w) > 1 \\ v_f = \frac{w}{(1-w)} \times \left(1 - \frac{1}{K(1-w)}\right) & \text{si ce nombre multiplié par } K(1-w) \text{ est inférieur à } 1 \end{cases}$$

*Démonstration.* On a,  $v_f = K(1-w)v_f(1-u_f)$ . Il vient, puisque  $v_f \neq 0$ ,

$$1 = K(1-w)(1-u_f)$$

Donc,

$$u_f = 1 - \frac{1}{K(1-w)}$$

On en déduit que,

$$1 - \frac{1}{K(1-w)} = \left(1 - \frac{1}{K(1-w)} + v_f\right)(1-w)$$

D'où,

$$\frac{1 - \frac{1}{K(1-w)}}{1-w} = \left(1 - \frac{1}{K(1-w)} + v_f\right)$$

Il vient,

$$\frac{1 - \frac{1}{K(1-w)}}{1-w} = \left(1 - \frac{1}{K(1-w)} + v_f\right)$$

Donc,

$$\frac{1}{1-w} - \frac{1}{K(1-w)^2} - 1 + \frac{1}{K(1-w)} = v_f$$

Donc,

$$v_f = \frac{1}{1-w} \left(1 - \frac{1}{K(1-w)} - (1-w) + \frac{1}{K}\right)$$

Finalement,

$$v_f = \frac{w}{1-w} \times \left(1 - \frac{1}{K(1-w)}\right)$$

□

La condition sur  $v_f$ , s'écrit  $Kw(1 - \frac{1}{K(1-w)}) < 1$ , ce qui équivaut à,  $Kw(1-w) < (1-w)$ .

Le raisonnement a été mené sans prendre en considération la possibilité que  $v_T = 1$  en fin de journée, c'est-à-dire que les bactéries envahissent le bassin en totalité en fin de soirée avant le brassage.

Si un tel cas de figure arrive, alors la dépollution est complète le lendemain ( $T+1$ ) avant l'évaporation.

On a alors en fin de soirée

- un volume de bactéries de  $K(1-w)(1-p_{T+1})$  avec  $p_{T+1} \leq 1-w$  et donc  $1-p_{T+1} \geq w$
- un volume d'eau pollué de  $w$ , donc  $p_{T+1} = w$

Et pour que cela se reproduise le jour  $T+2$ , il faut qu'en soirée du jour  $T+1$ ,  $K(1-w)(1-p_T) \geq 1$ .

Et de la même manière, pour que cela se reproduise le jour  $T+3$ , il faut qu'en soirée du jour  $T+2$ ,  $K(1-w)(1-p_{T+1}) \geq 1$ . Or  $p_{T+1} = w$ , donc,  $K(1-w)w \geq 1$ . Alors un système constant s'installe avec  $p_T = 1-w$  et  $v_T = w$ .

## 6.2 Les premiers jours

Le jour 1, on a,  $p_1 = 0$  et  $v_1 = v_0$ .

Il y a dépollution totale dès le premier jour si  $v_0 = 1$ , mais après on réintroduit  $w$  de pollution.

Si  $K(1-w) > 1$ , les bactéries continuent de remplir le bassin à la fin du jour 1, elles vont à nouveau dépolluer tout au jour 2. Si en fin de jour 2,  $K(1-w)w > 1$ , la dépollution a lieu à nouveau le jour 3 et le système reste constant.

Si  $K(1-w) < 1$ , on a une disparition progressive des bactéries, qui tendent vers 0 et  $p_T$  tend lui aussi vers 0.

Au jour 2,  $p_2 = (1-w)v_0$  et  $v_2 = K(1-w)v_0(1 - (1-w)v_0)$ .

Il y a dépollution totale au 2ème jour si les bactéries emplissent tout le bassin avant le brassage à la fin du jour 1, soit  $K(1-w)v_0 \geq 1$ , soit  $K(1-w) \geq \frac{1}{v_0}$ .

On repasse par l'étape d'une dépollution totale et,

- si  $K(1-w)w > 1$ , le système reste constant avec dépollution complète tous les jours.
- si  $K(1-w) \leq 1$ , on a une disparition des bactéries.

Au jour 3,  $p_3 = v_0(1-w)^2(1 + K(1-w)(1 - v_0))$  et  $v_3 = K^2(1-w)^2v_0(1 - (1-w)v_0)(1 - v_0(1-w)^2(1 + K(1-w)(1 - v_0)))$ .

Il y a dépollution totale au 3ème jour si les bactéries emplissent tout le bassin à la fin du 2ème jour, avant le brassage, soit,  $K(1-w)rv_0(1 - (1-w)v_0) \geq 1$ . Ce qui devient complexe à résoudre dès le 3ème jour. La suite est encore plus compliquée qu'à la question précédente.

## 6.3 Etude de la convergence

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} K(1-w)v_T(1 - u_{T+1}) & \text{si } K(1-w)v_T(1 - u_{T+1}) \leq 1 - u_{T+1} \\ 1 - u_{T+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $K(1-w) < 1$ , la suite  $(v_T)$  décroît plus vite que la suite géométrique de raison  $K(1-w)$  puisque  $(1 - p_{T+1}) \leq 1$ . Elle converge donc vers 0. La suite  $p_T$  converge alors également vers 0.

Si  $K(1-w)w > 1$ , alors la suite  $(v_T)$  croît plus vite qu'une suite géométrique de raison  $K(1-w)w$ , puisque  $1 - p_{T+1} \geq w$ , et ne s'arrêtera de croître qu'en atteignant les valeurs constantes  $v_T = w$  et  $p_T = 1 - w$ .

Il reste donc à étudier le cas où  $K \in [\frac{1}{1-w}; \frac{1}{w(1-w)}]$ . Si  $K(1-w) = 1$ ,  $v_T$  est décroissante, donc convergente. Si cette limite est non nulle,  $(p_T)$  est bornée par un minimum  $p_m$  à partir d'un certain rang,  $v_T$  décroît comme une suite géométrique de raison  $1-p_m$ , et elle converge vers 0. Donc  $v_T$  converge vers 0 et  $p_T$  aussi par conséquent.

Si  $K(1-w)w = 1$ , le système constant de dépollution complète tous les jours avec  $v_T = w$  et  $p_T = 1-w$ , peut être atteint, dès lors qu'il est atteint une fois (ce qui n'est pas établi).

Si  $\frac{1}{1-w} < K < \frac{1}{w(1-w)}$ , le système constant de dépollution complète tous les jours avec  $v_T = w$  et  $p_T = 1-w$  ne peut être atteint.

On est dans le cas où  $v_f$  et  $p_f$  existent.

Si la double suite  $(p_T, v_T)$  converge, sa limite est l'un des deux points fixes  $(0, 0)$  ou  $(p_f, v_f)$ .

Mais si la double suite tend vers  $(0, 0)$ . On a,  $v_{T+1} = K(1-w)(1-p_{T+1})$ , donc  $(v_T)$  qui est croissante tant que  $(1-p_{T+1})$  est supérieur à un minimum  $m$  tel que  $K(1-w)m > 1$ .  $(v_T)$  sera donc croissante plus rapidement qu'une suite géométrique de raison  $K(1-w)$ . Si  $p_T$  tend vers 0,  $v_T$  va croître fortement. Or  $p_T > (1-w)v_{T-1}$  donc  $p_T$  va croître fortement aussi,  $p_T$  peut pas tendre vers 0.

Ainsi, si la suite  $(p_T, v_T)$  est convergente dans cet intervalle de  $K$ , c'est nécessairement vers  $(p_f, v_f)$ . Il reste à déterminer à quelle condition cette suite est convergente. On n'a pas résolu cette question.

On cherche à présent à déterminer à quelles conditions, la suite  $(p_T, v_T)$  est périodique. On a déjà le cas de figure de la question précédente de suite constante à partir d'un certain rang (pour  $Kw(1-w) > 1$ ). En dehors de ce cas de figure, on peut limiter l'étude à l'intervalle sans convergence certaine, soit  $K \in [\frac{1}{1-w}; \frac{1}{w(1-w)}]$ .

## 7 Une météo variable

On revient ici à un modèle sans évaporation (le modèle de la section 5), mais avec une alternance du coefficient de reproduction  $K$ , qui est de  $K_1$  les jours impairs et de  $K_2$  les jours pairs. Cette alternance est supposée modéliser l'effet d'une alternance de beaux jours (coefficient de reproduction  $K_1$ ) et de jours de pluie (coefficient de reproduction  $K_2 < K_1$ ).

On a donc le modèle suivant,

$$\forall T \in \mathbb{N}, u_{T+1} = u_T + v_T$$

$$\forall T \in \mathbb{N}, v_{T+1} = \begin{cases} K_1 v_T (1 - p_{T+1}) & \text{si } T \text{ impair} \\ K_2 v_T (1 - p_{T+1}) & \text{si } T \text{ pair} \\ 1 - p_{T+1} & \text{si } (K_1 \text{ ou } K_2) v_T (1 - p_{T+1}) > 1 - p_{T+1} \end{cases}$$

L'étude de ce modèle s'apparente donc à celle du modèle de la section 5. Sur un grand nombre de générations, et pour  $v_T \ll 1$ , tout se passe en moyenne comme dans le modèle de la section 5, avec  $K = \sqrt{K_1 K_2}$ . Pour les conditions aux limites du modèle,  $K_1 v_T$  ou  $K_2 v_T$  proche de  $1 - p_T$ , les choses vont se compliquer.

La suite  $p_T$  est à nouveau toujours croissante. Comme elle est majorée par 1, elle est convergente. La question est de savoir si elle converge vers 1.

## 7.1 Les premiers jours

Le jour 0, on a,  $p_0 = 0$  et  $v_0 = 1$ . Il y a dépollution totale dès le jour 0 si  $v_0 = 1$ .

Au jour 1,  $p_1 = v_0$  et  $v_1 = K_1 v_0 (1 - v_0)$ . Il y a dépollution totale au 2ème jour si les bactéries emplissent tout le bassin avant le brassage à la fin du 1er jour, soit si  $K v_0 \geq 1$ , soit  $K_1 \geq 1/v_0$ .

Au jour 2,  $p_2 = v_0(1 + K_1(1 - v_0))$  et  $v_2 = K_1 K_2 v_0 (1 - v_0)(1 - v_0(1 + K_1(1 - v_0)))$ . Il y a dépollution totale au jour 2 si les bactéries emplissent tout le bassin à la fin du jour 1, avant le brassage, soit,  $K_1 K_2 v_0 (1 - v_0) \geq 1$ , soit  $\sqrt{K_1 K_2} \geq \frac{1}{\sqrt{v_0(1 - v_0)}}$ . On retrouve la même condition que dans la section 5, mais au lieu du coefficient  $K$ , c'est la moyenne géométrique de  $K_1 K_2$ , qui doit être supérieure à  $\frac{1}{\sqrt{v_0(1 - v_0)}}$ .

## 7.2 La dépollution selon $K_1$ et $K_2$

Etudions les dépollutions selon les coefficients  $K_1$  et  $K_2$ .

Si  $K_1 K_2 \leq 1$  Si  $K_1$  et  $K_2$  sont tous deux inférieurs à 1, alors  $v_T(K_1, K_2, v_0)$  est majorée par la suite  $v_T(K_1, v_0)$  de la section 5 avec un seul coefficient  $K$ . On avait montré que cette suite convergeait vers 0 et que la dépollution était impossible.

## 8 D'autres pistes de recherche

Les principes du problème sont de déterminer une loi d'évolution des bactéries et de la quantité de pollution, qui est un stock de nourriture.

Les bactéries ont à disposition un stock de nourriture plus ou moins important. Elles en retirent de l'énergie. Dans les modèles étudiés jusqu'à présent, cette énergie est uniquement consacrée à la reproduction, puisqu'elles meurent.

On peut imaginer un modèle qui répartissent l'énergie acquise par cette pollution-nourriture entre :

- l'acquisition de nourriture
- la reproduction
- un processus de réparation visant à assurer la survie de la bactérie au jour suivant

Dans le modèle développé ici, on peut envisager que l'énergie nécessaire pour l'acquisition de la nourriture soit plus faible quand il y a beaucoup de nourriture disponible par rapport au nombre de bactéries. De ce fait chaque bactérie pourrait consacrer plus d'énergie à sa survie/reproduction quand il y a beaucoup de nourriture et qu'elle n'a pas à consacrer de l'énergie à acquérir cette nourriture. Autrement dit,  $K$  serait une fonction croissante de  $(1 - p_t)$ . Par exemple,  $K(t) = K_A x p_t + (1 - p_t) x K_B$ . Quand il n'y a quasiment que de l'eau propre, une bactérie qui arrive à se nourrir malgré tout a un coefficient de reproduction  $K_A$ . Quand il n'y a que de l'eau polluée, le coefficient de reproduction est  $K_B$ , avec  $K_B > K_A$ .

On a alors le modèle suivant :

$$p_{T+1} = p_t + v_T$$

$$v_{T+1} = K(t)(v_T - v_T^2)(1 - p_{T+1}) = (K_A p_t + (1 - p_t)K_B)(v_T - v_T^2)(1 - p_{T+1}).$$

De manière plus générale, toute idée correspondant à une observation, ou à un modèle biologique permet de définir un modèle du type

$$p_{T+1} = p_t + v_T \quad v_{T+1} = f(p_t, v_T, M(t)) \text{ avec } f(p_t, v_T, M(t)) < 1 - p_t. \text{ Où } M(T) \text{ représente les variables (en fonction du temps) influant sur le processus, comme la température par exemple.}$$