

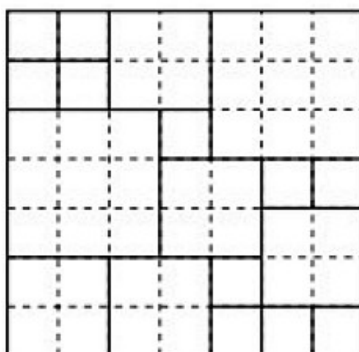
Olympiades par équipes

Entraînement n°2

Exercice 1 :

Il s'agit de paver des grilles carrées de côté n unités (où n est un entier), nous dirons de taille n , avec des carreaux de forme carrée de tailles entières strictement plus petites que n , de manière qu'il n'existe aucune droite horizontale ou verticale traversant la grille sans intersecter au moins un carreau du pavage. Un tel pavage sera dit *insécable*.

Exemple : Un exemple de pavage insécable d'une grille de taille 7, pavée avec 18 carreaux (deux de taille 3, cinq de taille 2 et onze de taille 1).



PARTIE I :

- 1) a) Donner tous les pavages possibles pour des grilles de taille 1, 2, 3 et 4.
b) Expliquer que dans un pavage insécable de taille $n \leq 4$, il ne peut pas y avoir de carreaux de taille $n - 1$ ou $n - 2$.
c) Existe-t-il parmi les pavages trouvés à la question 1-a des pavages insécables ?
- 2) On considère maintenant une grille de taille $n = 5$.
Combien de pavages insécables existe-t-il ?
- 3) A partir d'un pavage insécable d'une grille de taille 5, construire un pavage insécable d'une grille de taille 6, en expliquant la méthode.

PARTIE II :

Dans cette partie, on considère un entier $n \geq 5$.

- 1) Cas n pair :
 - a) On prend $n = 6$. Montrer qu'il existe un pavage insécable d'une grille de taille 6 formé uniquement de carreaux de tailles 1 et 2.
 - b) Montrer que pour toute grille de taille un entier $n \geq 5$ pair il existe un pavage insécable formé uniquement de carreaux de tailles 1 et 2.
- 2) Cas n impair :

Montrer que pour toute grille de taille un entier $n \geq 5$ impair il existe un pavage insécable formé uniquement de carreaux de tailles 1 et 2.
- 3) On cherche maintenant à maximiser le nombre de carreaux utilisés pour un pavage insécable d'une grille de taille n .
 - a) Expliquer que pour utiliser un maximum de carreaux, nous devons utiliser des carreaux de tailles 1 et 2.
 - b) Pourquoi devons-nous minimiser le nombre de carreaux de taille 2 ?
 - c) Exprimer en fonction de n le nombre maximal de carreaux de taille 2 que nous devons utiliser afin de maximiser le nombre total de carreaux dans le pavage.
 - d) En déduire le nombre minimum de carreaux de taille 1 utilisés et le nombre total minimum de carreaux qui composent le pavage.

Exercice 2 :

Une unité de longueur est donnée dans le plan. Un triangle ABC a pour côtés $AB = 15$, $AC = 8$ et $BC = 17$.

1. Montrer que ce triangle est rectangle, en indiquant quel point est le sommet de l'angle droit.



Corde à 13 nœuds et triangle égyptien

Plus généralement, on s'intéresse aux triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières. On pose $AB = m$, $BC = n$ et $BC = p$. On fait l'hypothèse que $m < n < p$ et on dit que le triplet (m, n, p) est pythagoricien.

2. a. Si (m, n, p) est un triplet pythagoricien, quel point est le sommet de l'angle droit du triangle rectangle ABC associé ?

b. Montrer que $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien. Les triangles associés sont les « triangles égyptiens ».

c. Montrer que, si le triplet $(m, n, 5)$ est pythagoricien, alors $m = 3$ et $n = 4$.

3. On suppose que le triplet $(5, n, p)$ est pythagoricien.

a. Montrer que $(p - n)(p + n) = 25$.

b. Comparer $p + n$ et $p - n$ et en déduire leurs valeurs puis finalement les valeurs de p et de n . Le triangle associé est dit « babylonien ».

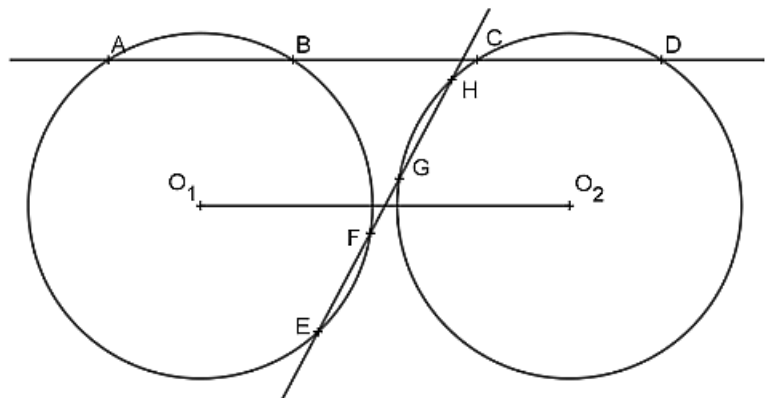
4. Existe-t-il des entiers m et p tels que le triplet $(m, 5, p)$ soit pythagoricien ?

Exercice 3 :

Une unité de longueur est donnée dans le plan.

Deux cercles, de centres respectifs O_1 et O_2 et de même rayon inconnu, sans point commun, sont donnés. Une parallèle à (O_1O_2) coupe le premier cercle en A et B, le second en C et D, de sorte que $AB = BC = CD = 14$.

Une seconde droite coupe le premier cercle en E et F, le second en G et H, de sorte que $EF = FG = GH = 6$.



Quel est le rayon des cercles ?

Si besoin est, on pourra appeler P le milieu de $[O_1O_2]$, M et N les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, Q et R les milieux respectifs de $[EF]$ et $[GH]$.