Sommaire Chantiers septembre 2025

Article mis en ligne le 1er octobre 2025
dernière modification le 27 septembre 2025

les Chantiers de pédagogie mathématique — n°206 septembre 2025

Édito

Article mis en ligne le 1er octobre 2025

par Le Comité de la Régionale

Toutes les rentrées ne se ressemblent peut-être pas. Néanmoins, une chose devient malheureusement habituelle, à savoir les décisions de dernière minute. Cette année, c'est le collège qui écope d'annonces ministérielles (surprises ?) sur le brevet alors même que nous avons commencé à préparer nos séances et nos progressions. Les enseignants de lycée devront, quant à eux, certainement réinventer l'eau chaude pour remettre aux goûts de la ministre démissionnaire des projets locaux d'évaluations, de fait déjà existants et nourris de réflexions internes aux établissements.

Pourtant, nous étions déjà sur le qui-vive pour appréhender au mieux les changements de cette année scolaire 2025- 2026. Rappelons qu'après l'entrée en vigueur de nouveaux programmes sur une partie du cycle 3 dès cette rentrée, suivra l'an prochain la mise en place de ceux de cycle 4 et de lycée, pour lesquels nous n'avons à ce jour que des projets. S'ajoute, dès la session 2026, l'instauration d'une épreuve anticipée de mathématiques au baccalauréat.

Ces transformations successives et trop souvent tardivement annoncées nous bousculent, nous obligeant à adapter dans l'urgence nos pratiques et à définir de nouvelles modalités de travail pour accompagner au mieux nos élèves.

Dans ce contexte, notre association est là pour offrir un espace d'échanges, mais aussi pour porter collectivement une parole forte en faveur d'un enseignement de mathématiques exigeant, réfléchi et au service de tous les élèves.

L'imminence des Journées Nationales de l'association, qui se dérouleront à Toulon du 18 au 21 octobre 2025 témoigne de cette occasion unique de se retrouver, d'échanger sur nos pratiques, tout en s'amusant. Notez bien dans vos agendas la réunion de notre Régionale qui aura lieu le dimanche 19 octobre au matin, suivie d'un moment de convivialité lors du repas de la Régionale, le dimanche au soir.

Au calendrier de cette année, ajoutons la « Journée de la Régionale » qui se tiendra après les vacances de la Toussaint et, pour laquelle nous souhaitons réfléchir autour de l'intelligence artificielle. C'est d'ailleurs le thème de la fête de la Science 2025. N'hésitez à nous témoigner dans les prochains Chantiers des événements que vous organisez au sein de vos établissements.

Nous lançons également la nouvelle édition du concours de la Régionale et de l'IREMS de Paris : Maths et égalités. Cette année, le thème embrasse celui de la future semaine des maths 2026 et nous proposons aux classes de créer un journal. Alors, inscrivez-vous dès maintenant en visitant la page dédiée de notre site, pour une année sous le signe des mathématiques, du plaisir et du partage avec vos classes.

Les brèves de la Régionale

Article mis en ligne le 1er octobre 2025
dernière modification le 27 septembre 2025

par Le Comité de la Régionale, Michel Suquet

Sommaire

Le concours « Maths & Égalités »

Mathématiques hors les murs
2024 — 2025

Le concours 2025 — 2026 de la Régionale APMEP d'Île-de-France et de l'IREMS de Paris a pour thème « Maths & Égalités ».

Le concours est ouvert aux classes et groupes d'élèves d'Île-de-France, de l'école à l'université, encadrés par un ou plusieur·e·s enseignant·e·s, et nous attendons qu'ils réalisent **un journal** dont le contenu doit être en lien avec le thème.

Le règlement du concours vous donnera tous les détails nécessaires pour participer.

Le thème est très riche, les partenariats possibles avec les collègues des autres disciplines et du professeur documentaliste sont nombreux. Alors, que vous soyez en collège, en lycée, et même à l'école élémentaire ou à l'université, n'hésitez pas à vous lancer !

Des exemples de réalisations des éditions précédentes sont consultables sur le site de la Régionale.

Concours « la mathémagie de Noël 2025 »

Dominique Souder nous propose le concours « la mathémagie de Noël 2025 » qui consiste à lire un document d'activités mathémagiques, puis de répondre à des questions au sujet des mathématiques cachées qui permettent la réussite des tours ou la construction des objets magiques présentés.

Ce concours, gratuit, est réservé aux classes des écoles primaires, et aux élèves de niveau primaire souhaitant le faire à titre individuel. Tous les inscrits et inscrites reçoivent en cadeau le livre numérique de magie mathématique de Dominique Souder, « Tours de magie et symétries » .

L'inscription se fera sur le site de la FFJM à partir du 1er octobre 2025. ***lien plus précis en attente…***

Festival Maths en ville

Le **festival Maths en ville** revient cette année **du 4 au 11 octobre 2025** à Saint-Denis, Aubervilliers, Pierrefitte, Villetaneuse et également Montereau-Fault-Yonne.

Au programme : des jeux, des ateliers, des rencontres, des spectacles, …

Retrouvez l'agenda et le programme en détail surle site de la manifestation.

RJMI & JFMI

Encouragez vos élèves filles à participer aux journées Filles, Maths et Informatique organisées par Animath et l'association femmes & mathématiques.

Ces événements permettent à des jeunes filles fortement intéressées par les mathématiques et l'informatique de découvrir l'enseignement supérieur et la recherche scientifiques, de discuter de manière informelle avec d'autres jeunes passioné·e·s, de rencontrer des étudiant·e·s et des professionnel·le·s et de repartir avec des ressources et des éléments de réflexion sur leur avenir.

Prochaines journées : lundi 20 et mardi 21 octobre 2025 à l'INRIA—Saclay. Consultez les autres dates prévues.

L'association *femmes et mathématiques* organise également le **lundi 13 octobre 2025** une journée à destination des lycéennes de terminale et aux étudiantes de première année de classes préparatoires ou de licence de mathématiques d'Île-de-France afin de les informer sur **les métiers qu'offrent les secteurs de la banque et de l'assurance** aux personnes ayant une solide formation en mathématiques.
La journée permet de rencontrer des femmes modèles accessibles et de réfléchir à son orientation.
Elle se termine par une pièce consacrée à Florence Nightingale, à l'origine des représentations statistiques et de leur usage en santé publique, par la Compagnie Terraquée.

Elle se déroulera au Conservatoire national des arts et métiers à Paris, de 9 h à 17 h.
Le programme provisoire de la journée est consultable sur le site de l'association.

L'inscription est gratuite mais obligatoire via ce formulaire.

Expositions

En cette rentrée, deux nouvelles expositions à la Maison Poincaré :
- Sous la surface, les maths
  du 11 septembre 2025 au 21 mars 2026
- Grothendieck Mathématicien — Le temps des réflexions 1973-1991
  du 1er octobre 2025 au 30 janvier 2026

À venir également, l'exposition M.C. Escher, grande rétrospective consacrée à Maurits Cornelis Escher à la Monnaie de Paris, du 15 novembre 2025 au 1er mars 2026.

Les problèmes préférés de Michel Broué

Le mathématicien René Cori soumet ses collègues à la question : quels sont vos problèmes préférés et pourquoi ?

Michel Broué a accepté d'inaugurer cette série.

Les trois problèmes préférés de Michel Broué et leurs solutions figurent dans le magazine tangente n°225 et sur le site tangente-mag.com : Mes problèmes préférés - Michel Broué

Retrouvez la vidéo de l'entretien sur YouTube, avec le texte de chaque problème dans la description de la vidéo.

Palais de la Découverte : un musée innovant mais en danger

Créé sous l'impulsion de Jean Perrin en 1937, le Palais de la Découverte est notamment célèbre pour son planétarium et sa salle consacrée à l'électricité. Fermé depuis 2020 pour rénovation, le doute plane sur sa réouverture en 2026. La culture scientifique est-elle en danger ? Pourquoi ?

Jean Audouze, Robin Jamet et Tania Louis nous en parlent (création, évolution, projets et interrogation) dans La Science, CQFD, émission animée par Natacha Riou.

Jean-Michel Courty, un des commissaires scientifiques du Palais, nous parle des démarches innovantes, privilégiant l'exploration, la créativité, l'interaction des disciplines et la mise en pratique des savoirs, ancrées dans notre temps, dans La Science au labo, émission animée par Céline Loozen et dans Divers aspects de la pensée contemporaine, émission animée par Michèle Leduc et Emmanuelle Huisman Perrin.

Quelle place pour la culture scientifique en France ?

Fermé depuis quatre ans pour rénovation, le Palais de la découverte pourrait ne jamais rouvrir ses portes. Cette incertitude dépasse la seule question d'un musée parisien : elle met en lumière les fragilités d'un secteur culturel essentiel mais discret, celui de la culture scientifique.

La situation du Palais de la découverte n'est pas un problème isolé. Et à travers la crise traversée par le Palais, se pose la question de la culture scientifique que nous voulons partout en France.

Chroniques mathématiques

Cédric Villani tient une chronique mathématique hebdomadaire dans le quotidien l'Humanité depuis novembre 2024 : les sujets abordés sont l'occasion d'attirer notre attention sous l'angle des mathématiques.

Citons notamment la place des femmes en mathématiques, celle des mathématiciens en politique ou la première de ces chroniques sur la beauté toujours renouvelée de la mathématique.

Encore une occasion de nous réjouir que des mathématicien·ne·s s'engagent et mettent leurs qualités au service de toutes et tous, comme nous l'avons exprimé dans l'édito des Chantiers en juin 2017 !

Petites histoires de science

Étienne Ghys, dans une série de podcasts de l'Institut de France, nous compte les divers états de la vérité. Tout y passe : théologie, histoire, l'intelligence artificielle, les mathématiques et bien d'autres aspects.

L'ensemble de cette série de podcasts est constitué d'environ 130 enregistrements dont les thèmes abordent aussi bien des problèmes actuels que l'histoire des sciences.

Cette série est relayée par France Inter qui en propose 20 épisodes répartis en 4 thèmes : les mots de la science, les femmes de science, les erreurs en science, les mathématiciens d'aujourd'hui.

Médiation scientifique

Jean-Baptiste Aubin, en plus de ses activités d'enseignant-chercheur en statistique, consacre une partie de son temps à la médiation scientifique sous diverses formes : bande dessinée, livre-guide, exposition, mathémagie, théâtre, conférence… Il nous en parle dans une interview sur le site de l'Insmi (Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions).

Son prochain spectacle est en préparation : une conférence-spectacle avec la cheffe de chœur Leslie Peeters intitulée « Mathématiques, la voix royale » où il sera question d'un dialogue entre une artiste et un scientifique. Ce spectacle est programmé pour le 4 décembre au théâtre de la reine Blanche à Paris (festival des savants sur les planches 2025).

Des bébés et des maths

Que savons-nous des capacités mathématiques des bébés ? Les chercheuses Véronique Izard et Lola de Hevia répondent aux questions de Zoé Varier dans deux épisodes de la série Les super pouvoirs des bébés :
- Les bébés ont-ils des intuitions mathématiques ?
- Les bébés humains en savent-ils autant que les bébés animaux ?
- Que savent les bébés des nombres et de l'espace ?

Pour en savoir plus sur les connaissances noyaux, vous pouvez visiter les projets du labo bébé de l'université Paris Cité, notamment ceux qui portent sur les mathématiques.

Revue de presse

Sur le site Images des mathématiques qui donne à voir « la recherche mathématique en mots et en images », une revue de presse est proposée chaque mois.

Sont abordés divers thèmes qui alimenteront vos réflexions : la vie de la recherche, la recherche et ses applications, l'enseignement, la diffusion de la culture mathématique, les parutions d'ouvrages ou de magazines, l'histoire des mathématiques, les concours, les arts et les maths,…

Le Petit Vert

Le bulletin de nos amis de Lorraine a été publié en septembre, avec le numéro 163 qui sera, comme les autres numéros, une source d'idées pour vos cours.

Dans l'édito de ce numéro, hommage à Gilles Dowek et aux liens entre les outils numériques et l'enseignement des mathématiques.

MathémaTICE

Le numéro 96 de la revue en ligne MathémaTICE est paru en septembre 2025 avec pour thème principal l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques et pour ce numéro des articles très divers dont certains abordent l'utilisation de l'intelligence artificielle (IA) dans l'enseignement.

Pour les prochains numéros de cette revue, des articles sont déjà prêts mais susceptibles de corrections avant leur publication définitive.

APMEP
CHANTIERS
DE PÉDAGOGIE MATHÉMATIQUE

Découverte de Pearltrees Éducation

un réseau social pédagogique pour transformer l'enseignement

Article mis en ligne le 1er octobre 2025
dernière modification le 22 septembre 2025

par Amadou Diallo

Sommaire

Un écosystème pédagogique

Dans un monde où le numérique redéfinit les pratiques éducatives, Pearltrees Éducation se présente comme une solution innovante pour centraliser, organiser et partager les ressources pédagogiques. Lors d'une formation récente, les enseignants ont exploré cette plateforme, conçue comme un réseau social pédagogique, intégrant élèves, professeurs et administration au sein d'un même écosystème sécurisé. Voici un aperçu de ses fonctionnalités et de son potentiel pour révolutionner la gestion des cours.

Pearltrees Éducation n'est pas qu'un outil de stockage : c'est un écosystème pédagogique qui connecte, organise et enrichit l'apprentissage. En centralisant les ressources, en favorisant la collaboration et en intégrant une IA au service des enseignants, il plante les graines d'une éducation plus fluide et interactive. Reste aux professeurs à s'approprier cet outil à leur rythme, avec la certitude que la technologie est là pour amplifier leur créativité, pas pour la remplacer.

Une plateforme tout-en-un pour l'éducation

Pearltrees Éducation s'apparente à un bureau numérique intuitif, accessible depuis un ordinateur, une tablette ou un smartphone. Connectée à l'ENT (Espace Numérique de Travail), la plateforme garantit une sécurité optimale des données, sans collecte d'informations personnelles. Les utilisateurs n'ont pas besoin de mémoriser de nouveaux mots de passe, un atout pour les élèves souvent débordés par les identifiants multiples.

Les enseignants peuvent y centraliser toutes leurs ressources : documents PDF, vidéos, photos, articles web, ou même contenus issus de leur ordinateur ou de plateformes comme YouTube. L'absence de publicité lors de la lecture des vidéos intégrées est un plus pour maintenir l'attention des élèves. Par exemple, un professeur de mathématiques peut importer un cours en PDF, ajouter une vidéo explicative et proposer des modélisations 3D pour illustrer des concepts complexes, rendant l'apprentissage plus visuel et engageant.

Organiser et personnaliser ses séquences pédagogiques

L'un des points forts de Pearltrees est sa capacité à structurer les contenus via des collections, équivalents numériques de dossiers ou de classeurs. Chaque collection peut être enrichie avec des images d'illustration, des éditos précisant les compétences visées, et des tags pour une navigation fluide. Les enseignants peuvent ainsi organiser leurs séquences de cours, créer des activités de classe ou d'établissement, et même gérer des projets collaboratifs.

La fonction d'édition permet d'adapter les ressources aux besoins des élèves. Un article web trop dense ? L'enseignant peut en extraire les parties essentielles, ajouter un glossaire ou des questions de compréhension. Par exemple, pour un cours sur la Grèce antique, un professeur peut simplifier un article Wikipédia, mettre en gras le vocabulaire clé comme « civilisation mycénienne » et proposer des exercices interactifs.

Collaboration et partage maîtrisés

Pearltrees favorise la collaboration grâce à ses équipes, des sous-groupes où les élèves peuvent travailler ensemble, s'autocorriger ou réaliser des projets. Les enseignants contrôlent finement les droits d'accès : lecture seule pour les cours, écriture pour les travaux de groupe. Un historique des actions permet de savoir qui a modifié quoi, et rien n'est irréversible : une suppression accidentelle peut être annulée en un clic.

Le partage est tout aussi flexible. Les ressources peuvent être diffusées via un QR code, un lien permanent intégré à Pronote, ou directement dans l'annuaire de l'établissement. Les enseignants peuvent choisir de limiter l'accès à une classe, un groupe, ou même à eux seuls, garantissant une confidentialité adaptée.

Un assistant pédagogique dopé à l'IA

Depuis janvier 2025, Pearltrees intègre une intelligence artificielle pédagogique, réservée aux enseignants. Conforme au RGPD et développée avec des professeurs, elle aide à générer des contenus sur mesure : introductions, QCM, glossaires, ou même conseils pour améliorer une copie d'élève. Par exemple, un enseignant peut demander une introduction en cinq lignes sur la démocratie athénienne ou un QCM en anglais avec trois choix de réponses. L'IA propose une base que l'enseignant peut modifier directement dans l'interface, sans jongler entre plusieurs outils.

Bien que perfectible dans certaines disciplines comme les mathématiques ou l'allemand, l'IA excelle en français et en anglais. Elle permet de gagner un temps précieux, tout en laissant l'enseignant maître de ses choix pédagogiques. À terme, elle promet d'analyser des vidéos, des fichiers audios, et de proposer des QCM interactifs.

Une adoption prometteuse

Lors de la formation, les enseignants, novices comme aguerris, ont apprécié la simplicité et la polyvalence de Pearltrees. Que ce soit pour structurer un cours, dynamiser une leçon avec des vidéos ou collaborer avec les élèves, la plateforme séduit par sa capacité à s'adapter à tous les profils. Les lycées, y compris les plus prestigieux comme Henri IV, y voient un outil pour moderniser l'enseignement sans remplacer l'humain.

Pour accompagner cette transition, un guide intégré et une assistance personnalisée sont disponibles. Les enseignants peuvent contacter un formateur dédié ou consulter des exemples d'usages régulièrement mis à jour. Une évaluation des pratiques en fin d'année permettra de mesurer l'impact de Pearltrees dans les établissements.

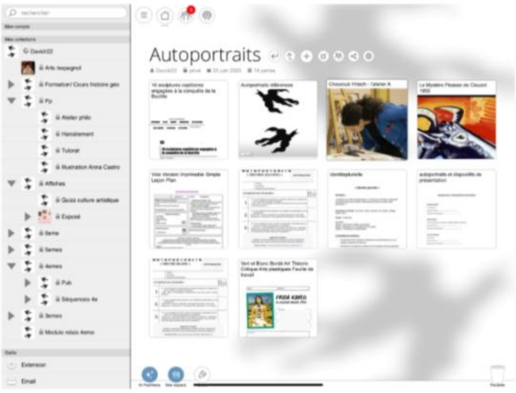
Témoignages d'enseignants sur l'usage de Pearltrees au collège Gustave Courbet

Rebecca David professeure d'Arts plastiques :

Pearltrees en classe : un outil polyvalent pour organiser, archiver et valoriser les productions d'élèves

Dans le cadre de ma pratique pédagogique, j'utilise régulièrement l'application Pearltrees, qui s'avère être un outil particulièrement efficace pour organiser mes séquences, centraliser les ressources, mais aussi valoriser les travaux des élèves. Voici comment cet outil numérique s'intègre à mon quotidien d'enseignant.

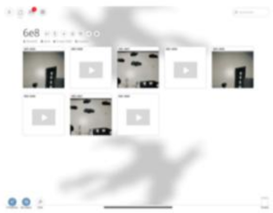
Un espace d'archivage structuré



Pearltrees me permet tout d'abord d'archiver mes séquences pédagogiques. J'ai mis en place une organisation simple et efficace : un fichier par niveau, dans lequel je rassemble toutes les séquences de l'année. Cela me permet de retrouver rapidement les contenus, de les modifier si besoin, et d'y accéder facilement en classe.

Je peux également y stocker des références artistiques que je souhaite présenter aux élèves, qu'il s'agisse d'images, de vidéos ou de liens vers des œuvres. Cet accès rapide aux ressources rend la préparation des séances plus fluide et enrichit les moments de découverte artistique en classe.

Un portfolio numérique pour suivre les productions



Pearltrees me permet aussi de créer un portfolio numérique des travaux des élèves. Chaque classe dispose de son propre dossier, au sein duquel chaque élève a un espace dédié. En un clic, je peux — ou les élèves peuvent, à l'aide d'une tablette connectée — prendre en photo leurs productions (qu'elles soient en 2D ou en 3D) et les ajouter dans le portfolio.

Ce système favorise la traçabilité des apprentissages, facilite les retours aux élèves et permet de suivre leur évolution au fil de l'année. C'est aussi un support précieux lors des rencontres avec les familles ou pour les bilans de fin de période.

Un support interactif pour la verbalisation en classe

Lors des temps de verbalisation, l'application offre un autre avantage : je peux projeter en direct les travaux photographiés au tableau. Cela permet de mettre en valeur les productions au fur et à mesure, tout en nourrissant les échanges oraux autour des œuvres réalisées.

Qu'il s'agisse d'un travail sur les monstres et les textures en 6e, d'un projet de construction en 3D autour du point de vue en 4e, ou encore de la projection de vidéos créées en classe dans le cadre d'un projet sur le théâtre d'ombres, Pearltrees facilite ces moments de partage, en rendant visibles les productions de chacun.

Amadou Diallo professeur de mathématiques et référent pour les ressources et usages pédagogiques numériques :

J'utilise Pearltrees pour organiser et mutualiser les ressources pédagogiques à destination des élèves. La plateforme permet de créer des dossiers accessibles en ligne regroupant documents, tutoriels, vidéos, ou encore liens interactifs. Cette organisation facilite le suivi des séquences, l'autonomie des élèves et le partage de productions.

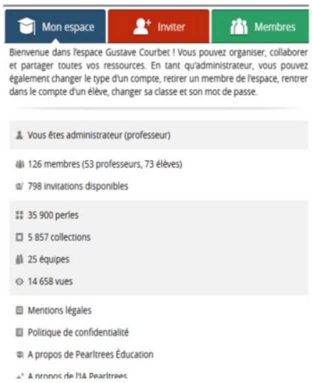
Dans le cadre de notre club robotique, les élèves ont programmé une chorégraphie de robots mBot 2, présentée lors de l'événement *Courbet Show* au sein du collège. Nous avons mis en ligne la vidéo de la prestation, ainsi que plusieurs images et explications, afin de valoriser ce travail auprès des familles et d'autres enseignants.

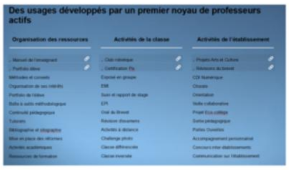
J'exploite également les fonctionnalités d'intelligence artificielle de Pearltrees pour générer des exercices différenciés, notamment en probabilités. L'IA me propose des reformulations, des niveaux de difficulté variés, ce qui me permet d'ajuster les activités en fonction de l'hétérogénéité des classes.

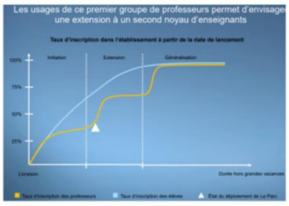
Un usage innovant de Pearltrees au collège Gustave Courbet (Seine-Saint-Denis)

Le collège Gustave Courbet, situé en Seine-Saint-Denis, s'est engagé dans un projet pilote départemental visant à repenser ses pratiques pédagogiques à travers l'usage de Pearltrees Éducation depuis 2022. Dès les premières étapes du déploiement, un noyau d'enseignants volontaires a intégré l'outil à leurs démarches pédagogiques : création de portfolios numériques pour les élèves, mise en œuvre d'activités différenciées, préparation aux examens... autant d'usages qui favorisent l'autonomie et la personnalisation des apprentissages.

Le déploiement, structuré en trois phases — initiation, extension, généralisation — s'est accompagné d'un dispositif d'accompagnement progressif. Ateliers techniques, modules pédagogiques avancés (classe inversée, enseignement hybride) et accompagnement par des enseignants référents permettent aujourd'hui de soutenir une montée en compétence continue. Avec 53 enseignants et 73 élèves déjà impliqués, et plus de 35 000 ressources partagées, le collège Gustave Courbet illustre concrètement le potentiel d'un numérique éducatif inclusif, au service de la réussite dans un contexte d'éducation prioritaire.







Julien Schlaflang professeur documentaliste :

« Pearltrees s'est imposé comme un outil simple, efficace et collaboratif pour diffuser la culture au sein de l'établissement. L'espace Culture permet une circulation fluide de l'information, sans surcharger les boîtes mail. En tant que professeur documentaliste, je peux y déposer des ressources culturelles à tout moment, tout en sachant qu'elles resteront consultables à tout instant par les collègues. C'est aussi un bon moyen de valoriser le travail des référents culture et de renforcer les liens entre les disciplines. »

Afin de partager les informations culturelles pertinentes à l'ensemble des équipes éducatives et pédagogiques, un espace Culture a été créé sur la plateforme Pearltrees en début d'année 2023. Au-delà du simple partage, cette plateforme permet de centraliser et conserver les informations sur un espace dédié, constituant ainsi une veille culturelle facilement accessible par toutes les équipes de l'établissement.

Cet espace comprend :

- Un document hebdomadaire résumant les offres et informations culturelles reçues par l'établissement. Une sélection est opérée par les référents culture afin de ne transmettre que les informations les plus pertinentes.
- Des guides d'utilisation d'ADAGE (au format PDF et vidéo), à destination de tous les personnels, facilitant l'accès aux démarches de financement et de déclaration des projets culturels.

Chroniques des IREM

Article mis en ligne le 1er octobre 2025
dernière modification le 27 septembre 2025

par Le Comité de la Régionale, Christophe Hache, Sylviane Schwer

Sommaire

Les IREM

Dans une de nos premières chroniques iremoises, nous avions donné les objectifs des travaux des IREM.

La région parisienne accueille 2 IREM : l'IREM de Paris Nord et l'IREM de Paris. Et ce sont en tout 40 groupes de travail qui sont à l'œuvre au sein de ces deux IREM : cela vous donne la diversité des thèmes ainsi abordés.

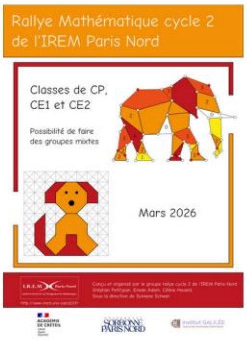
À noter que maintenant les IREM accueillent des groupes d'autres disciplines ou des groupes interdisciplinaires. D'ailleurs, certaines IREM sont devenues des IRES ou des IREMS.

Du côté de l'IREM de Paris Nord

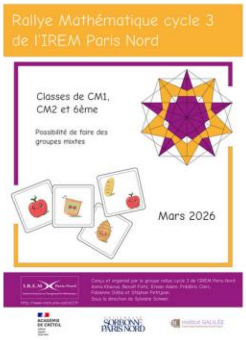
Comme les années passées, nous proposons 2 rallyes mathématiques pour le cycle 2 et le cycle 3.

Les gazettes de l'édition 2026 du rallye ont été publiées :

- gazette du rallye, cycle 2
- gazette du rallye, cycle 3



rallye cycle 2
affiche



rallye cycle 2
affiche

Les groupes de l'IREM sont ouverts à tous et toutes, n'hésitez pas à vous manifester.

rallye cycle 2 affiche

Pour tout renseignement concernant l'IREM de Paris Nord, notamment nos groupes de travail, contactez-nous.

Du côté de l'IREMS de Paris

Les brèves de la bibliothèque

Pour tout renseignement concernant l'IREMS de Paris, notamment nos groupes de travail, contactez-nous.

Et les autres IREM ?

La richesse des travaux engagés dans toutes les IREM est à votre portée via le site national des IREM. Vous pouvez d'ailleurs consulter la rubrique Actualités, manifestations, brochures…

Vous pouvez aussi consulter LitteraMath qui propose un ensemble de listes d'ouvrages choisis conjointement par l'APMEP, par le réseau des IREM, par Pole (éditeur du magazine Tangente), avec le soutien de la CFEM (Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques), à destination des bibliothécaires ou des parents, à la recherche de livres ayant trait aux mathématiques, provenant de divers horizons, de différents niveaux, disponibles en librairie, qui ont un intérêt littéraire.

Et enfin, vous pouvez utiliser, pour rechercher une ressource, PubliMath qui est une base de données bibliographiques pour l'enseignement des mathématiques en langue française, développée par l'APMEP et l'ADIREM (Assemblée des directeurs d'IREM) depuis 1996 avec le soutien de la CFEM (Commission française de l'enseignement des mathématiques) et de l'ARDM (Association pour la recherche en didactique des mathématiques).

La page de recherche de Publimath comprend aussi un volet « recherche avancée et dans les revues » : n'hésitez pas à vous en servir.

Grain de riz… pour apprendre

3e partie

Article mis en ligne le 1er octobre 2025

par Martine Quinio Benamo

Suite à la recension de l'ouvrage Un grain de riz sur un échiquier — les mathématiques c'est politique, nous avons demandé à son auteure Martine Quinio Benamo de nous proposer quelques idées d'exercices pour éclairer des notions de mathématiques qui interviennent dans l'actualité.

Dans les numéros précédents des Chantiers Martine Quinio Benamo nous avait proposé quelques idées d'exercices pour éclairer la notion de croissance exponentielle (numéro 204) et la notion de pourcentage et plus généralement de fraction (numéro 205), toujours en lien avec des sujets d'actualité.

Dans ce numéro des Chantiers, c'est au tour de la notion de moyenne : son utilisation dans les médias et les discours des responsables (politiques on non) est-elle pertinente ?

Les références indiquées, sauf mention contraire, concernent les pages de l'ouvrage de Martine Quinio Benamo : « Un grain de riz sur l'échiquier — les mathématiques c'est politique » aux éditions de l'Atelier (2023). Cet ouvrage est cité par « GR » ou « Grains Riz ».

Sommaire

Introduction

« Un statisticien est une personne qui peut avoir la tête dans un four et les pieds pris dans la glace et dire qu'en moyenne il se sent bien. » (cité p.58 dans GR, Benjamin Dereca)

En convoquant à chaque occasion la moyenne, on en perd le sens :
« J'estime que je conduis mieux que la moyenne », « Je me considère plus optimiste que la moyenne »…

Une tribune de Christian Walter [1] reprend les concepts de « médiocristan » et d'« absurdistan » à propos de la toute puissante moyenne, souvent mise en avant pour justifier une décision politique :

> « Les financiers aiment bien croire qu'ils peuvent maîtriser le monde économique par des moyennes. Hélas, comme le rappelait déjà La Fontaine dans la fable *le Savetier et le Financier*, à un financier qui lui explique savamment le principe de la moyenne pour qu'il puisse gérer prudemment ses affaires, le savetier désolé répond : « Ce n'est point ma manière de compter de la sorte. » Le vrai monde ignore la moyenne. Si les financiers avaient davantage écouté les savetiers, la crise de 2008, conséquence d'une gestion désastreuse des risques fondée sur l'usage imprudent des moyennes, n'aurait pas eu lieu. »
>
> extrait de la tribune de Christian Walter

La moyenne, c'est une proportion ; elle ne reflète pas la réalité comme nous le rappelle Christian Walter dans sa tribune, il faut lui associer la notion d'écart type qui est lui aussi une moyenne, donc une proportion, faisant intervenir, de plus, la racine carrée.

Nous vous proposons quelques exercices en lien avec les actualités récentes sur le thème de la moyenne, exercices que vous pourrez adapter pour vos élèves. Notez bien que la moyenne intervient dans de nombreux indicateurs : nous passons en revue quelques-uns d'entre-eux, qu'ils soient liés par exemple à l'environnement, à la santé ou à l'économie. Ce sera l'occasion de projets et travaux interdisciplinaires permettant à nos élèves de travailler leur esprit critique : les mathématiques étant un outil indispensable pour analyser les différents arguments intervenant dans les débats d'actualité.

NB : les documents issus de l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Études Économiques) présentent un décalage inévitable.

Environnement et santé

Commençons par une révision de la croissance exponentielle avec la pétition Duplomb : en juillet 2025, une jeune femme [2] lance une pétition dont le nombre de signataires augmente très vite. À l'aide des réseaux sociaux et à l'aide de mails transmis, la pétition atteint rapidement un million de signatures, puis 2 millions quelques jours plus tard. Comment expliquer la rapidité de la vitesse du nombre de signatures ?

Par la croissance exponentielle !

Exercice

> Si à partir de la première personne signataire chaque destinataire de mail envoie un mail à 10 personnes et que 3 personnes sur 10 signent (au moins), au bout de combien de mails la pétition aura atteint 1,5 million de signatures ? Montrer que 13 mails envoyés et traités ainsi suffisent (voir GR p.46 croissance ou décroissance exponentielle, et p.70 taux de reproduction Covid pour un calcul analogue).

Le taux de reproduction du Covid : c'est aussi une moyenne (GR p.70).

> « Nier que le Covid ait pu saturer durant des mois des services hospitaliers en mettant en avant la « part moyenne » des patients Covid sur toute l'année et dans toute la France, c'est à peu près la même chose que nier la canicule de 2003 en affirmant qu'il n'a fait que 15 degrés en moyenne cette année-là. »
>
> source : Cédric Mathiot, Libération 16/11/2021
> « On peut débattre de tout sauf des chiffres » : le débat sur le Covid au niveau zéro

Travail sur les moyennes glissantes à propos de taux d'incidence/ tests (GR p. 68,69) : différences entre personnes nouvelles contaminées sur une période, (détectées à l'instant t par tests ou a posteriori par taux d'hospitalisation) versus personnes infectées sur la période ayant fait ou pas le test.

Voir étude britannique sur moyennes glissantes (source Public Health England).

L'espérance de vie

L'Espérance de vie est une moyenne (GR p.63) qui permet d'aborder différents aspects des débats d'actualités : nous vous proposerons un article spécifique à ce sujet.

Économie

Exercice (un peu d'humour)

> « La dette se creuse de 5 000 euros par seconde » (F. Bayrou, juillet 2025).
> Ce dessin de presse (Le Canard enchaîné, juillet 2025) affirme qu'« un œuf dur c'est 2,7 millions de dette » : calculer le temps de cuisson moyen d'un œuf dur.

Pouvoir d'achat

> « Exemple de l'augmentation moyenne qui masque ou qui trompe ; longtemps (avant la récente inflation) le gouvernement affirmait que le pouvoir d'achat avait augmenté en moyenne, ce qui était faux pour les classes moyennes, vrai pour les plus précaires mais pour eux une augmentation en petit pourcentage était minime. En disant le salaire a augmenté de 2 % c'est 20 ou 30 euros pour les plus précaires et peut-être 20 000 euros pour les plus riches ! » (voir GR p.61, 62)

Exercice

À la lecture du texte suivant, avons-nous suffisamment de données pour affirmer la conclusion ?
« Depuis le début du quinquennat Macron, selon l'Institut des Politiques Publiques, le pouvoir d'achat des plus riches a augmenté de 4,1 % et baissé de 0,5 % pour les plus pauvres ».
Conclusion, « le pouvoir d'achat a augmenté en moyenne de 1,6 % ».

Jeux et paris sportifs

> « 82,8 % de la dépense est concentrée sur seulement 10 % des joueurs. »
>
> « 64 % des parieurs sportifs ont entre 18 et 34 ans. On comptait plus de 4 millions de comptes actifs en 2023 avec 1982 € de mise moyenne annuelle par compte : « 1982 € de mise moyenne pour les paris » : quelle est l'information ? »
>
> source : Observatoire Français des Drogues et Toxicomanies (OFDT)

Depuis l'ouverture des jeux en ligne en 2010, puis la privatisation de la FDJ (Française Des Jeux) et la possibilité de jouer et parier sur les mobiles, l'addiction aux paris sportifs a progressé de manière vertigineuse ; elle touche des publics de plus en plus jeunes, tandis que l'activité des jeux de hasard traditionnels a baissé. Voici quelques données chiffrées pouvant alimenter quelques exercices. Une source étant l'Observatoire Français des Drogues et Toxicomanies (OFDT).

> « Depuis dix ans que le marché des jeux d'argent et de hasard s'est ouvert à la concurrence sur Internet, le nombre de joueurs a explosé, pour dépasser les 3,2 millions de comptes actifs. C'est près de trois fois plus que les joueurs de poker en ligne et plus de cinq fois celui des turfistes sur Internet. »
>
> source : Observatoire Français des Drogues et Toxicomanies (OFDT)
>
> « Rien qu'entre 2013 et 2018, le montant des mises engagées par ces joueurs est passé de 848 millions d'euros à près de 4 milliards, soit un bond en cinq ans de 370 % ! Ramenés au produit brut des jeux (PBJ), soit les mises moins les gains, les paris sportifs font, là encore, la course en tête : 691 millions d'euros en 2018, sur un total de 1,2 milliard (paris sportifs, hippiques et poker cumulés). »
>
> source : Le Monde, janvier 2020

De 2014 à 2019, l'Observatoire des Jeux a constaté également une augmentation des paris sportifs de plus de 60 %(....) et la proportion de joueurs de paris sportifs parmi les jeux en ligne est passée de 26,1% à 61%. (Les proportions ayant encore explosé suite au Covid.)

Écologie

Exercice

Commentez : « Le visionnage des vidéos en ligne mondiales représente l'équivalent des émissions de la France (soit 1 à 2 % de la consommation mondiale). »
source Oxfam

Consommation de CO2, pays riches, pays pauvres : que signifie une moyenne quand il y a tant de variabilité ? (GR p.59)

> « Un être humain émet en moyenne 6,6 tonnes d'équivalent dioxyde de carbone (CO2) par tête et par an. Un Français, près de 9,9 tonnes [3]. » mais : « les 1% les plus riches sont responsables de 17% des émissions de CO2, et les 10% les plus riches de 48% des émissions de CO2. »
>
> source Oxfam

Nombreux exemples issus de GR p.52 : consommation d'eau et production de tabac ; émissions de CO2 ; voir p.75 la différence entre « empreinte carbone » et « émission de carbone », dont un schéma.

Exercice

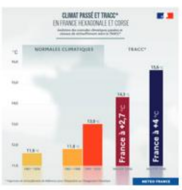
Expliquer à l'aide du graphique p. 75 la phrase p. 76 : « Pour la France (...) l'empreinte carbone est aujourd'hui (2022) de 43 % supérieure aux émissions territoriales ».
Comparer avec le cas de l'Inde, de la Chine de l'Australie.

Augmentation moyenne de la température

> « La température moyenne annuelle en France hexagonale et Corse est de 13,9 °C en 2024. Dans une perspective de climat futur, cette température annuelle sera dépassée plus d'une année sur deux dans une France à + 2,7 °C (horizon 2050) et quasi systématiquement dans une France à + 4 °C (horizon 2100). La moyenne de 2024 correspondra aux années les plus fraîches dans une France à +4 °C (moyenne attendue de 15,6) »
>
> source dans la conférence de Magali-Reghezza-Zitt

La température des mers et océans est moindre donc elle atténue celle sur Terre ; voir documents de la conférence sur le réchauffement climatique aux Rencontres de Blois par Magali-Reghezza-Zitt.

On peut suggérer un travail sur les documents ci-dessous (issues de cette conférence).



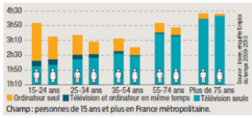
La pertinence de l'information

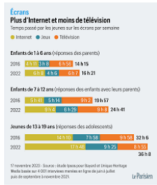
Temps d'écran

« Les Français passent en moyenne 4,6 heures par jour devant un écran, tous supports confondus »
« Selon une étude, le temps d'écran peut grimper jusqu'à 7 heures par jour pour un adolescent. »
source : France Info, 20 janvier 2024

Écrans : 4h37 par jour en moyenne, sommes-nous accros ?

Commentez la qualité de l'information contenue dans ces extraits ; on s'aidera des graphiques suivants.





Notes

[1] tribune Du Médiocristan à l'Absurdistan, publiée dans Libération, parue dans la rubrique Idées et Débats du 15/04/2021

[2] Il s'agit d'Éléonore Pattery qui a initié cette pétition sur le site de l'Assemblée Nationale le 10 juillet 2025.

[3] Sébastien Mabile, Le Monde 3/7/22

Article mis en ligne le 1er octobre 2025
dernière modification le 27 septembre 2025

par Alain Bougeard, Michel Suquet

Avis de recherche du n°202

À la suite de Pierre Carriquiry (voir le numéro 205 des Chantiers), Pierre Delezoïde revient sur cet avis, dont la solution s'était conclue par quelques questions à son sujet, d'une part en le généralisant (pourquoi se limiter à 3-4-5 ?) et, d'autre part, en cherchant les triangles de périmètre maximum. Pierre nous donne aussi quelques indications pour les triangles de périmètre minimum : peut-être l'un·e d'entre-vous pourra-t-il le confirmer.

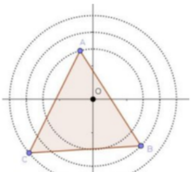
> Soit ABC un triangle et O un point à l'intérieur d'icelui. Les segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ ont pour longueurs respectives 3, 4 et 5. Quel est le périmètre du triangle ?

L'avis de recherche du n°202 n'est pas clos et voici quelques éléments pour en dire un peu plus.

> Soit O un point du plan et 3 distances $d_a, d_b, d_c\ (>0)$; les points A, B, C sont respectivement à distance d_a, d_b, d_c de O, quel est le maximum du périmètre du triangle ABC ?

Dans ce qui suit triangle maximum signifie triangle de périmètre maximum.

NB de la rédaction : vous pouvez utiliser la figure ci-contre pour suivre les raisonnements de Pierre.



1) Il existe des triangles maximaux.

Les points A, B, C variant sur des compacts (des cercles) et la distance entre deux points étant une fonction continue de ces points, le périmètre du triangle est borné, ce qui est évident par ailleurs, et les bornes sont atteintes.

2) Un triangle maximum n'est pas aplati.

Sinon l'un des sommets serait sur le côté opposé, par exemple $C \in [AB]$; pour tout point C' du cercle de centre O et de rayon d_c qui n'est pas sur $[AB]$, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, $AB = AC + CB < AC' + C'B$; par conséquent le triangle ABC ne serait pas maximum.

3) Dans un triangle maximum (donc non aplati) O est le centre du cercle inscrit.

On laisse fixes A, B et on fait varier C : soit $t \mapsto M(t)$ un paramétrage par angle polaire du cercle de centre O et de rayon d_c, le point C correspondant au paramètre t_0.

Par hypothèse $M(t_0) = C \neq A$, donc $M(t) \neq A$ pour t voisin de t_0. La longueur $\ell_A(t) = AM(t)$ est donc une fonction $\mathcal{C}^1$ au voisinage de t_0.

Par définition $\ell_A^2(t) = \left\langle \overrightarrow{AM}(t) \,\middle|\, \overrightarrow{AM}(t) \right\rangle$,

donc en dérivant : $2\,\ell'_A(t)\ell_A(t) = 2\left\langle \vec{M}'(t) \,\middle|\, \overrightarrow{AM}(t) \right\rangle$

d'où en t_0 : $\ell'_A(t_0) = \left\langle \vec{M}'(t_0) \,\middle|\, \vec{u}_A \right\rangle$ où $\vec{u}_A$ est le vecteur unitaire qui dirige $\overrightarrow{AC}$ [1].

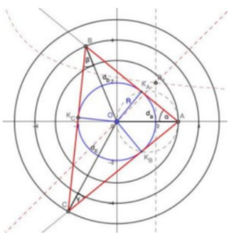
On procède de manière analogue pour B.

Le paramètre t_0 correspond à un maximum du périmètre $P(t)$
donc : $0 = P'(t_0) = \ell'_A(t_0) + \ell'_B(t_0) = \left\langle \vec{M}'(t_0) \,\middle|\, (\vec{u}_A + \vec{u}_B) \right\rangle$

Le vecteur $\vec{u}_A + \vec{u}_B$ n'est pas nul, sinon C appartiendrait à l'intervalle $]A, B[$, et comme $\vec{M}'(t_0)$ est non nul orthogonal à $\overrightarrow{OC}$, $\vec{u}_A + \vec{u}_B$ est colinéaire à $\overrightarrow{OC}$. Par conséquent O est sur la bissectrice intérieure de l'angle en C dans le triangle.

Il en est de même pour les bissectrices intérieures en A et en B, donc O est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

4) Les triangles non aplatis ABC dont O est le centre du cercle inscrit sont isométriques entre eux.



On note α le demi-angle au sommet en A, β en B et γ en C ; ce sont trois angles dans l'intervalle $]0, \pi/2[$ dont la somme vaut $\pi/2$; cela implique une relation algébrique entre les sinus de ces angles :

$\sin\gamma = \sin(\pi/2 - \alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta)$

ou encore $\sin\gamma = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

soit $\cos\alpha\cos\beta = \sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta$

ce qui élevé au carré donne :

$\sin\gamma^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha^2\sin\beta^2 = (1 - \sin\alpha^2)(1 - \sin\beta^2)$

avec $(1 - \sin\alpha^2)(1 - \sin\beta^2) = 1 - \sin\alpha^2 - \sin\beta^2 + \sin\alpha^2\sin\beta^2$

d'où la relation (symétrique) cherchée : $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$

En projetant O orthogonalement sur les côtés du triangle et en notant R le rayon du cercle inscrit (strictement positif), on obtient $R = d_a\sin\alpha = d_b\sin\beta = d_c\sin\gamma$ et par conséquent :

$$(d_a^{-2} + d_b^{-2} + d_c^{-2})R^2 + 2d_b^{-1}d_a^{-1}d_c^{-1}R^3 = 1 \quad (\mathcal{E})$$

Le polynôme en R établit une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même ;

l'équation $(\mathcal{E})$ a donc une et une seule solution $R_0 > 0$ et comme le polynôme prend une valeur > 1 en d_a, d_b et d_c, on en déduit que R_0 est strictement plus petit que chacune de ces longueurs.

Les demi-angles aux sommets α, β, γ dans $]0, \pi/2[$ sont alors déterminés par les relations $R_0 = d_a\sin\alpha = d_b\sin\beta = d_c\sin\gamma$.

Les angles au centre O, sont aussi déterminés : $\widehat{AOB} = \pi/2 - \alpha + \pi/2 - \beta = \pi/2 + \gamma$
et de même $\widehat{BOC} = \pi/2 + \alpha$ et $\widehat{COA} = \pi/2 + \beta$.
Ces triangles sont donc isométriques entre eux.

5) Conclusion

Il y a des triangles maximaux (1), il sont non aplatis (2), O est le centre de leur cercle inscrit (3), ce qui est une CNS pour qu'un triangle soit maximum, car ces triangles dont O est le centre du cercle inscrit sont isométriques entre eux (4).

6) Construction et calcul du maximum avec GeoGebra

On suppose $d_a \leqslant d_b \leqslant d_c$. On choisit arbitrairement A tel que $OA = d_A$, ce qui déterminera un seul triangle direct dont O est le centre du cercle inscrit, ce triangle sera maximum.

Le rayon R_0 du cercle inscrit peut être déterminé par intersection de courbes, par exemple remplaçant $(\mathcal{E})$ par :

$$R = \frac{1}{\sqrt{d_a^{-2} + b_b^{-2} + d_c^{-2} + 2d_a^{-1}d_b^{-1}d_c^{-1}R}}$$

qui est une équation de point fixe toujours convergente.

Les côtés AB et AC sont portés par les (demi)-tangentes en A au cercle inscrit de rayon $R_0\ (< d_a)$; ces tangentes coupent chacun des cercles de centre O et de rayons d_b, d_c en deux points de part et d'autre de A (intérieur aux cercles de centre O et de rayons d_b, d_c) mais comme les points de contact sont entre A et B et entre A et C, on trouve ainsi les points B et C du triangle. S'il n'y a pas d'erreur on observera que la droite (BC) est tangente (entre B et C) au cercle de centre O et de rayon R_0.

Pour $d_a = 3$, $d_b = 4$ et $d_c = 5$, il semble ne rien y avoir de remarquable du point de vue algébrique. GeoGebra donne environ 20,93233 pour le périmètre maximum et environ 1,9002 pour le rayon du cercle inscrit.

NB : on peut se poser la question de savoir s'il existe des valeurs entières de d_a, d_b, d_c pour lesquelles R et le périmètre maximum P sont des entiers.

7) Et les triangles de périmètre minimum ?

Pour résoudre ce problème une partie des raisonnements utilisés pour le maximum peut être recyclée et on arrive assez facilement au résultat : les distances de O aux trois sommets étant fixées, les « triangles » de périmètre minimum sont les triangles dont les trois sommets sont sur une même demi-droite d'origine O (ils sont isométriques entre eux) ; le périmètre minimum est alors $2(d_c - d_a)$ si $d_a \leqslant d_b \leqslant d_c$.

Cependant, la contrainte « O intérieur au triangle » n'est alors pas respectée ; si on veut garder cette contrainte, en supposant que O « intérieur » signifie dans l'enveloppe convexe des sommets, on trouve que les triangles minimaux sont les triangles dont les trois sommets sont sur une droite passant par O, A d'un côté, B et C de l'autre ; le périmètre minimal est $2(d_a + d_c)$; ces triangles sont isométriques entre eux.

Avis de recherche du n°205

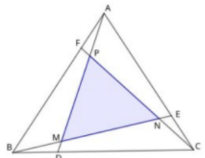
Daniel Perrin nous propose une solution qui exploite le caractère affine du problème. Vous y rencontrerez aussi l'utilisation du lemme du chevron.

À noter que nous avions généralisé le problème des tiers proposé dans le n°41 de PLOT ; Daniel généralise encore un peu plus avec un partage dans un rapport λ compris entre 0 et 1, incluant le partage en $\dfrac{1}{n}$.

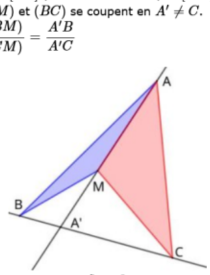
> Lu dans PLOT n°41 (décembre 1987, page 43) ce problème pour le cas $n = 3$. Et si on généralisait ?
>
> Un triangle. Trois droites qui joignent les sommets aux points qui divisent les côtés dans le rapport $\dfrac{1}{n}$.
>
> Que dire du triangle ainsi formé ?

Solution de cet avis de recherche

Je propose de montrer le résultat suivant :

> **Théorème**
> Soit ABC un triangle et D, E, F des points qui partagent les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ dans le même rapport : $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EC}{EA} = \dfrac{FA}{FB} = \lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Les droites (AD), (BE), (CF) déterminent un triangle MNP (voir figure 1 ci-dessous).
> Alors on a :
>
> $$\frac{\mathscr{A}(ABC)}{\mathscr{A}(MNP)} = 1 + \frac{3\lambda}{1-\lambda} + \frac{3\lambda^2}{(1-\lambda)^2} = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(1-\lambda)^2}$$
>
> 
>
> figure 1

Pour établir ce théorème, je fais appel au lemme du chevron pour lequel je fais une publicité permanente. Il s'agit d'un lemme bien utile dans les questions d'aires :

> **Lemme du chevron**
> On considère deux segments $[BC]$ (la base du chevron) et $[AM]$ (l'arête du chevron) et on suppose que les droites (AM) et (BC) se coupent en $A' \neq C$.
> Alors on a l'égalité : $\dfrac{\mathscr{A}(ABM)}{\mathscr{A}(ACM)} = \dfrac{A'B}{A'C}$
>
> 
>
> figure 2
> le lemme du chevron

Démonstration du lemme

Le résultat est valable quelles que soient les positions des points. Je traite seulement le cas de la figure.

On écrit $\mathscr{A}(ABM) = \mathscr{A}(ABA') - \mathscr{A}(MBA')$
et $\mathscr{A}(ACM) = \mathscr{A}(ACA') - \mathscr{A}(MCA')$.

Les aires des grands triangles et celles des petits triangles sont dans le rapport $A'B/A'C$ (bases alignées et même hauteur) et on en déduit le résultat par différence.

Démonstration du théorème

Le problème étant affine on peut supposer [2] le triangle équilatéral. Les aires rouges (resp. vertes) sont alors égales. On les note v et r et aussi T l'aire de ABC et t celle du triangle MNP bleu.

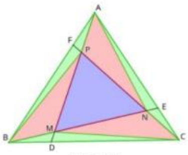


figure 1 bis
mise en évidence des chevrons

Le lemme du chevron appliqué à $[BC]$ et $[PM]$ donne $r = \dfrac{\lambda t}{1-\lambda}$,

appliqué à $[BC]$ et $[AP]$ il donne $v = \dfrac{\lambda r}{1-\lambda} = \dfrac{\lambda^2 t}{(1-\lambda)^2}$,

et le résultat s'ensuit par l'additivité des aires : $T = t + 3r + 3v$.

Application

Le cas usuel des tiers [3] où D est au tiers de $[BC]$ correspond à $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et on trouve $\dfrac{T}{t} = 7$.

Pour le cas des quarts (D est au quart de $[BC]$), $\lambda = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{T}{t} = \dfrac{13}{4}$.

Et pour les cinquièmes (D est au cinquième de $[BC]$), $\lambda = \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{T}{t} = \dfrac{7}{3}$.

Pour le cas $\dfrac{1}{n}$ de l'avis de recherche, $\lambda = \dfrac{1}{n-1}$ et $\dfrac{T}{t} = \dfrac{n^2-n+1}{(n-2)^2}$.

Discussion

On peut chercher les λ rationnels qui, comme $\lambda = \dfrac{1}{2}$ (le cas du partage en trois) donnent un rapport entier pour les aires.

Si l'on pose $\lambda = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, on montre (exercice) qu'il faut prendre $q = p+1$ et on trouve alors $\dfrac{T}{t} = 3p^2 + 3p + 1$.

Ainsi, pour $p = 1$ on retrouve $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{T}{t} = 7$, pour $p = 2$, $\lambda = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{T}{t} = 19$, pour $p = 3$, $\lambda = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{T}{t} = 37$, etc.

La figure 3 ci-dessous correspond au cas $p = 2$, $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{2}{3}$, le rapport des aires entre le grand et le petit triangle est égal à 19.

Les rapports suivants sont 37, 61, 91, etc.

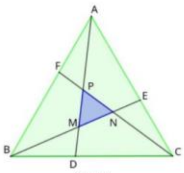


figure 3
le cas du rapport 19

Annexe 1 : L'argument de la nature du problème

J'explique brièvement le principe utilisé ci-dessus pour se ramener au cas équilatéral.

Rappelons que le plan affine $\mathscr{E}$ est le plan usuel, muni des points et des vecteurs (mais sans métrique *a priori*). Une transformation affine est une bijection f du plan telle qu'il existe une application linéaire $\vec{f}$ du plan vectoriel sous-jacent qui vérifie $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

Les propriétés affines sont celles qui sont conservées par les transformations affines. C'est le cas de l'hypothèse du problème ci-dessus (les rapports de longueurs sur une même droite) car on peut les exprimer en termes de vecteurs : $\overrightarrow{DB} = \lambda\overrightarrow{DC}$.

C'est aussi le cas de sa conclusion sur les rapports d'aires. En effet, l'aire d'un triangle ABC peut être vue comme la valeur absolue du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Dans la transformation affine f elle est donc multipliée par la valeur absolue du déterminant de f et les rapports d'aires sont bien conservés.

Par ailleurs, si l'on fixe une origine, les transformations affines sont composées de translations et d'applications linéaires (qui fixent l'origine) et cela montre qu'elles sont transitives sur les triangles : on peut envoyer n'importe quel triangle ABC sur n'importe quel autre $A'B'C'$ (on commence par envoyer A sur A' par translation, puis on utilise l'application linéaire qui envoie la base $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$).

En particulier on peut envoyer ABC sur un triangle équilatéral $A'B'C'$. Comme l'hypothèse est conservée, elle vaut pour $A'B'C'$. On prouve la propriété dans ce cas particulier et comme les rapports d'aires sont conservés, on revient à ABC par la transformation inverse.

Cette méthode est très précieuse pour montrer les propriétés de nature affine, par exemple le concours des médianes d'un triangle.

Annexe 2 : Une preuve directe

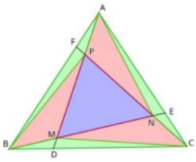


figure 1 bis

Pour le lecteur qui trouverait un peu magique l'argument de la nature affine du problème, voici comment on peut s'en passer par un petit calcul.

On prend des notations [4] pour les aires des triangles :
$a = \mathscr{A}(ANP)$, $b = \mathscr{A}(BPM)$, $c = \mathscr{A}(CMN)$, $m = \mathscr{A}(MBC)$, $n = \mathscr{A}(NCA)$, $p = \mathscr{A}(PAB)$
avec toujours $T = \mathscr{A}(ABC)$ et $t = \mathscr{A}(MNP)$.

Le lemme du chevron appliqué à $[BC]$ et $[PM]$ donne
$b = \lambda(t+c)$ et de même, par permutation circulaire, $c = \lambda(t+a)$ et $a = \lambda(t+b)$.

Le même lemme appliqué à $[BC]$ et $[AP]$ donne $p = \lambda(a+n)$ et de même $m = \lambda(b+p)$ et $n = \lambda(c+m)$.

En additionnant les trois premières égalités on a $a+b+c = 3\lambda t + \lambda(a+b+c)$
d'où $a+b+c = \dfrac{3\lambda}{1-\lambda}t$.

En additionnant les trois autres on a $m+n+p = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}(a+b+c)$

d'où $m+n+p = \dfrac{3\lambda^2}{(1-\lambda)^2}t$.

On obtient la formule annoncée en utilisant l'additivité des aires :
$T = t + (a+b+c) + (m+n+p)$.

Dans cette version de la solution, on n'utilise pas le fait que les aires rouges (resp. vertes) sont toutes égales. Cette propriété est pourtant vraie pour un triangle quelconque, comme le lecteur l'établira de l'une ou l'autre des manières ci-dessous.

1) Soit en utilisant les applications affines et en montrant qu'il existe une application affine qui envoie A, B, C sur B, C, A et les autres points sur leurs homologues. Cette application étant d'ordre 3 est de déterminant 1 donc conserve les aires.

2) Soit en raisonnant par l'absurde à partir des égalités $b = \lambda(t+c)$, $c = \lambda(t+a)$ et $a = \lambda(t+b)$. On suppose, par exemple, $a < b$, on en déduit $c < a$ etc. et on aboutit à une magnifique contradiction. On procède de même avec d, e, f.

Nouvel avis de recherche

De l'arithmétique pour ce nouvel avis de recherche qui est proposé par Pierre Delezoïde.

Observez le tableau ci-dessous qui a été découpé en sous-matrices 2×2 : vous aurez sans doute reconnu un extrait du fameux triangle de Pascal modulo 2. Que peut-on dire de remarquable pour ce triangle de Pascal modulo 2 avec sa grille de lecture 2×2 ?

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

On peut aussi généraliser, toujours modulo 2 avec une grille de lecture 4×4 au lieu de 2×2, puis 8×8, etc. (seulement des puissances de 2).

Nous attendons vos solutions que nous aurons plaisir à lire, et si, de plus, vous avez des problèmes à soumettre à la sagacité de nos lecteurs et lectrices, ainsi que des compléments sur des avis précédents, écrivez-nous à l'adresse des problèmes des Chantiers.

Les problèmes en Chantiers

Pour faciliter l'accès aux énoncés des problèmes parus dans les Chantiers, j'ai recensé l'ensemble de ceux que j'ai trouvé en passant en revue tous les numéros… depuis 1968 !

L'idée de proposer explicitement la résolution de problèmes dans nos colonnes date du n°35 (décembre 1975) et c'est notre collègue Roger Cuculière qui l'a initiée pour une série de 9 problèmes dont les solutions sont parues… à l'occasion du cinquantenaire des Chantiers, en 2019 ! Ensuite, il a fallu attendre le n°152 (mars 2012) pour qu'Alain Bougeard nous propose une série de « OUI ou NON » qui en septembre 2015 se sont transformés, avec ma participation, en « Avis de recherche » tels que nous les connaissons actuellement. Sans oublier notre collègue Serge Seguin qui nous a proposé quelques Avis de recherche, de juillet 2021 à janvier 2023.

En dehors de ces séries, épisodiquement, vous avez eu droit à quelques énoncés de problèmes dont certains attendent encore une solution publiée (l'un d'entre-eux me semble assez fantaisiste pour mériter une solution … à vous de juger !).

Voici la recension effectuée : Les problèmes en Chantiers.

Vous remarquerez que certains problèmes ont suscité plusieurs solutions ou des rebondissements : que cela vous incite également à nous faire part de vos commentaires et recherches sur les problèmes qui ont sollicité votre imagination.

retour au sommaire

Notes

[1] $\vec{M}'(t_0)$ est une notation rapide à écrire. Souvent, la dérivée de $t \mapsto \overrightarrow{AM}(t)$ est définie par $t \mapsto \vec{V}(t)$ qui introduit la notion de vitesse du mouvement : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$.

[2] Le lecteur ou la lectrice qui ne serait pas convaincu par cet argument pourra lire les annexes.

[3] Le problème proposé dans le Plot n°41 correspond à ce cas.

[4] Évidemment on choisit des notations qui permettent de tenir compte de l'invariance du problème par les permutations circulaires. Cela permet de ne regarder qu'une fois la figure pour écrire chaque groupe d'égalités.