



Pièces truquées

Problème 6

Dimanche 21 avril 2024

Equipe Montr'Euler (MTE)

I Présentation du jeu

II Recherche de l'espérance

III Recherche du gain minimal espéré

IV Conclusion

I) Présentation du jeu

- Jeu de pile ou face
- Félix lance une 1ère fois une pièce
- Clara essaye de prédire le résultat du lancer suivant
- ...

I) Présentation du jeu

Définition

Une **partie** est constituée des $n + 1$ lancers de Félix et des n prédictions de Clara.

Définition

Une **stratégie** pour Clara est une façon de prédire de quel côté la pièce va tomber

I) Présentation du jeu

Propriété du lancer de Félix

Si on considère les n lancers qui suivent le lancer 0.

Conditions

Epreuve de Bernoulli : 2 issues

Epreuve répétée de façon identique et indépendante n fois

X , la variable aléatoire qui donne le nombre de pile sur les n derniers lancers, suit la loi binomiale de paramètres n et p

On a donc $E(X) = n \times p$

II) Recherche de l'espérance

Clara gagne 1 point par prédiction juste. Le nombre total de point est appelé le gain.

L'objet de la question 1 est de présenter trois stratégies adoptées par Clara et d'en évaluer l'espérance de son gain.

II) Recherche de l'espérance

Stratégie a

Soit G_a la variable aléatoire qui donne le gain de Clara pour la stratégie a.

Définition:

Pour la stratégie a, Clara prédit toujours pile.

On a $E(G_a) = E(X) = n \times p$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

Soit G_c la variable aléatoire qui donne le gain de Clara pour la stratégie c.

Définition:

Pour la stratégie c, Clara prédit en fonction de la parité du nombre de piles tirés.

$\underbrace{P - P - P - \dots - P}_{\text{nombre pair de piles}}$ entraîne Clara prédit pile

$\underbrace{P - P - P - \dots - P}_{\text{nombre impair de piles}}$ entraîne Clara prédit face

Exemple

Au 3ème lancer Félix a déjà tiré 2 piles.

Il y a donc un nombre pair de pile et Clara prédit pile.

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

idée

- calcul de la probabilité que la pièce soit tombée sur pile $2i$ fois au $k^{\text{ième}}$ lancer
- de même pour $2i + 1$
- calcul de la probabilité que Clara gagne effectivement un point
- calcul de l'espérance

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

Définition :

Soit X_k la variable aléatoire qui donne le nombre de piles pour les k premiers lancers de Félix.

La probabilité que la pièce soit tombée sur pile un nombre pair de fois au $k^{\text{ième}}$ lancer est :

$$P(X_k = 0) + P(X_k = 2) + \dots + P(X_k = 2m)$$

avec $2m$ le plus grand entier pair appartenant à $[0, k]$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

Proposition

X_k suit la loi binomiale de paramètres k et p .

$$P(X_k = 2i) = \binom{k}{2i} \times p^{2i} \times (1-p)^{k-2i} \text{ pour } 2i \in [0, k]$$

Remarque

Si $2i > k$ alors $\binom{k}{2i} = 0$. On peut donc sommer toutes les possibilités pour $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

On obtient donc la probabilité d'avoir $2i$ piles au $k^{\text{ième}}$ lancer :

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{2i} \times p^{2i} \times (1-p)^{k-2i}$$

On calcule la probabilité que Clara obtienne effectivement un point :

$$\left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{2i} \times p^{2i} \times (1-p)^{k-2i} \right] \times p$$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

En procédant de même pour la probabilité d'obtenir un nombre impair de piles au $k^{\text{ième}}$ lancer, on obtient :

$$\left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{2i+1} \times p^{2i+1} \times (1-p)^{k-(2i+1)} \right] \times (1-p)$$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

On calcule maintenant l'espérance :

$$E(G_c) = \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{\left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{2i} \times p^{2i} \times (1-p)^{k-2i} \right]}_{S_k} \times p \right. \\ \left. + \underbrace{\left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{2i+1} \times p^{2i+1} \times (1-p)^{k-(2i+1)} \right]}_{T_k} \times (1-p) \right]$$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

$$\begin{aligned}S_k + T_k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \times p^i \times (1-p)^{k-i} \\ &= (p + (1-p))^k \\ &= 1\end{aligned}$$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

$$\begin{aligned}(-p + (1 - p))^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \times (-p)^i \times (1 - p)^{k-i} \\&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{2i} (-p)^{2i} (1 - p)^{k-2i} \\&\quad + \sum_{i=0}^k \binom{k}{2i+1} (-p)^{2i+1} (1 - p)^{k-(2i+1)} \\&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{2i} p^{2i} (1 - p)^{k-2i} \\&\quad - \sum_{i=0}^k \binom{k}{2i+1} p^{2i+1} (1 - p)^{k-(2i+1)}\end{aligned}$$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

On obtient donc le système suivant:

$$\begin{cases} S_k + T_k = 1 \\ S_k - T_k = (1 - 2p)^k \end{cases}$$

En sommant les deux égalités, on obtient:

$$\begin{aligned} 2S_k &= 1 + (1 - 2p)^k \\ S_k &= \frac{1 + (1 - 2p)^k}{2} \end{aligned}$$

De plus, $T_k = 1 - S_k$ donc:

$$\begin{aligned} T_k &= 1 - \frac{1 + (1 - 2p)^k}{2} \\ &= \frac{1 - (1 - 2p)^k}{2} \end{aligned}$$

II) Recherche de l'espérance

Stratégie c

$$E(G_c) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1 + (1 - 2p)^k}{2} \times p + \frac{1 - (1 - 2p)^k}{2} \times (1 - p) \right]$$

$$E(G_c) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1 + (1 - 2p)^k}{2} \times p \right] + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1 - (1 - 2p)^k}{2} \times (1 - p) \right]$$

$$E(G_c) = \frac{p}{2} \times \sum_{k=1}^n \left[1 + (1 - 2p)^k \right] + \frac{1 - p}{2} \times \sum_{k=1}^n \left[1 - (1 - 2p)^k \right]$$

...