Activité en groupe n°1

Durée : 2h

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. On admet que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$. On note α cette solution. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   (a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   (c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?